МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. П. ОГАРЁВА»

А. О. СЫРОМЯСОВ

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

САРАНСК
2014

УДК 51(076.1)
ББК В22.17я73
С953

Сыромясов А. О. Сборник типовых расчетов по аналитической геометрии, линейной алгебре и дискретной математике : учеб. пособие / А. О. Сыромясов. – Саранск, 2014. – 68 с.

С953

Пособие содержит теоретические вопросы (разделенные на базовый и профильный уровни), теоретические упражнения, расчетные задания и компьютерный практикум по аналитической геометрии, линейной алгебре и дискретной математике. Предназначено для студентов направлений и специальностей подготовки, входящих в укрупненные группы «Компьютерные и информационные науки» и «Информатика и вычислительная техника». Может быть использовано в преподавании соответствующих учебных дисциплин на других направлениях и специальностях, относящихся к областям образования «Математические и естественные науки» и «Инженерное дело, технологии и технические науки».

Печатается по решению Учебно-методической комиссии факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва».

УДК 51(076.1)
ББК В22.17я73

Учебное издание

СЫРОМЯСОВ Алексей Олегович

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Подписано в печать 28.02.2014. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,95. Тираж 100 экз. Заказ № 128.
Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии «Полиграф».
ИП Ковалева Е. Н. 430000, г. Саранск, ул. Рабочая, 155.

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Единственный способ зафиксировать, чему мы научили своих студентов, – это перечислить задачи, которые они должны уметь решать в результате обучения.
>
> *В. И. Арнольд*

Изучение линейной алгебры, аналитической геометрии и дискретной математики – важный элемент подготовки будущего программиста. Результатом обучения должно быть расширение круга задач, которые способен решать будущий специалист. Но их грамотное решение «на уровне рецептов» невозможно: необходимо понимание смысла совершаемых действий, для чего требуются серьезные теоретические знания.

Предлагаемые ниже типовые расчеты имеют структуру, во многом аналогичную «Сборнику заданий по высшей математике» Л. А. Кузнецова. Каждый из них включает:

– *теоретические вопросы*, перечень которых позволяет описать содержание того или иного раздела учебной дисциплины;
– *теоретические упражнения* (их цель – привить студенту начальные навыки самостоятельных теоретических рассуждений);
– *практические задания*, предназначенные для выработки навыков решения типовых задач по выделенным разделам математики.

В свою очередь, в теоретических вопросах выделены *базовый* и *профильный* уровни. Первый соответствует необходимой степени освоения предмета и обеспечивает выполнение требований Федерального государственного образовательного стандарта. Второй отвечает более глубокому изучению дисциплины. Расширение и углубление знаний в любом разделе математики – это бесконечный процесс; поэтому в профильную часть вынесены лишь вопросы, непосредственно примыкающие к базовым.

Чтобы учесть специфику будущей профессиональной деятельности студентов, в большинстве типовых расчетов предусмотрен *компьютерный практикум*. Как правило, входные и выходные данные очевидны из постановки задачи. Способ ввода данных (чтение с клавиатуры или из внешнего файла) и их вывода (на экран или в файл) непринципиален. Возможные исключения оговариваются особо.

Для выполнения теоретических упражнений, практических заданий и задач компьютерного практикума достаточным является материал, отраженный в базовом уровне теоретических вопросов.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. МАТРИЦЫ И ВЕКТОРЫ

Кое-кто из нас всю жизнь блуждает по Матрице.

К/ф «Матрица»

– Так я и думал! – воскликнул кок. – Это указательная стрелка… У меня все холодеет при мысли о Флинте. Это одна из его милых острот.

Р. Л. Стивенсон, «Остров сокровищ»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Матрицы, линейные операции над ними. Умножение матриц.
2. Определитель матрицы. Обратная матрица.
3. Системы линейных уравнений. Матричный метод решения СЛУ. Формулы Крамера.
4. Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных).
5. Ранг матрицы. Способы его вычисления.
6. Теорема Кронекера – Капелли.
7. Векторы, линейные операции над ними. Базис и размерность.
8. Деление отрезка в заданном отношении. Центр масс.
9. Декартова прямоугольная система координат.
10. Виды проекций.
11. Скалярное произведение, его свойства и приложения.
12. Векторное произведение: определение, свойства, геометрический смысл, физические приложения.
13. Смешанное произведение векторов, его свойства и приложения.

Профильный уровень

1. Алгоритм Штрассена быстрого умножения матриц.
2. Сложность вычисления определителя рекуррентным способом.
3. Вычислительная сложность методов Гаусса, Крамера, обратной матрицы решения СЛУ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что для любых согласованных матриц A и B справедливо равенство: $(AB)^T = B^T A^T$.
2. *Следом* $\mathrm{tr}(A)$ квадратной матрицы A называется сумма элементов, стоящих на ее главной диагонали. Какой вид должны иметь матрицы второго порядка A и B, чтобы для них выполнялось условие $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\cdot\mathrm{tr}(B)$?
3. В треугольнике проведены медианы. Доказать, что из них можно составить треугольник (длины медиан не вычислять).
4. В вершинах треугольника размещены грузы равной массы. Доказать, что центр масс данной системы расположен в точке пересечения медиан треугольника.
5. Доказать, что биссектриса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарна вектору
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$
6. Выражение $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ называется *двойным векторным произведением*. Доказать *тождество Лагранжа*: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
7. Доказать *тождество Якоби*: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ (используйте тождество Лагранжа).
8. Доказать, что площадь S параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть найдена по формуле
$$S^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}.$$
9. Угловая скорость $\vec{\omega}$ твердого тела направлена вдоль оси его вращения так, что при взгляде с конца $\vec{\omega}$ вращение видно происходящим против часовой стрелки. Доказать, что осестремительное ускорение $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ направлено к оси вращения перпендикулярно ей.
10. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – аффинный базис в пространстве. Векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ образуют базис, *взаимный* к $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если
$$\vec{e}_i \cdot \vec{f}_j = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$
Доказать, что векторы
$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}, \vec{f}_2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}, \vec{f}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}$$
образуют базис, взаимный к $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Замечание. В заданиях № 6, №№ 11–15 система координат декартова прямоугольная. Там, где это требуется, система координат считается правой.

№ 1. Выполнить действия над матрицами.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T$.

3. $\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ -7 & 2 & 9 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $\left[\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -9 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}\right]^T + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -5 \\ 6 & 10 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & -8 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

7. $\left[\begin{pmatrix} 6 & 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T - \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. $\left[\begin{pmatrix} 9 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}\right]^T + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 9 \\ 7 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T - \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right]^T$.

10. $\left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\right]^T - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

№ 2. Найти определитель, раскрыв его:

а) по одной из строк;

б) по одному из столбцов.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 5 \\ 4 & -2 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & -12 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 11 & 9 \\ 2 & -8 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -6 & -3 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 0 & 5 \\ -8 & 10 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 7 & -5 & 4 & 3 \\ -15 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 13 & 9 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & 4 & 8 \\ -7 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -6 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 & 6 \\ -6 & 7 & 3 & 9 \\ 8 & 11 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 & 3 \\ 6 & -7 & 5 & 1 \\ 14 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 6 \\ -15 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 10 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \\ 11 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 12 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

№ 3. Решить систему линейных уравнений:

а) методом обратной матрицы;
б) по формулам Крамера;
в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 48, \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 13. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 5, \\ -9x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -31. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 43, \\ 5x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -69. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26, \\ 7x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24, \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 66. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -27, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 23, \\ -5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -33. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 33, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 56. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 20. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -43, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 26, \\ 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 67. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 47, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24, \\ -3x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 71. \end{cases}$

№ 4. Найти ранг матрицы:

а) методом окаймляющих миноров;
б) с помощью элементарных преобразований строк и столбцов.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ -8 & -1 & 11 & 11 \\ -14 & -8 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & -5 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -6 & 6 \\ 16 & 13 & -10 & 16 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 6 \\ 9 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -7 & 5 \\ -2 & 0 & -11 & -7 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 & 7 \\ -14 & 11 & -3 & -13 \\ -2 & -7 & 16 & 11 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 7 & 3 \\ -7 & 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 14 & -4 & 10 \\ -3 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -8 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 0 \\ -7 & -2 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 5. Дана система уравнений. Требуется:

а) с помощью теоремы Кронекера – Капелли убедиться в совместности системы;

б) найти общее решение системы;

в) найти два различных частных решения и выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 18x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 24x_4 = 18, \\ -3x_1 - x_3 - 4x_4 = -3, \\ -9x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 12x_4 = -9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -5, \\ -8x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 10x_4 = -24, \\ 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ 6x_1 - x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 19. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ -9x_1 + 4x_2 - 14x_3 - 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 5x_1 + 6x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -7, \\ -15x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 18x_4 = -48, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 16. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 - 13x_2 + 6x_3 - 6x_4 = -21, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 22. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ 17x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 14x_4 = 0, \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 6, \\ -14x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 10x_4 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -2, \\ -4x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 3, \\ -5x_1 - 11x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 7, \\ -4x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 13, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ -5x_1 - 9x_3 + 3x_4 = 19. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -5, \\ 4x_1 - 6x_2 - 10x_3 - 8x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

№ 6. Траектория материальной точки представляет собой ломаную $ABCDE$, где DE – полуокружность. Найти перемещение материальной точки и пройденный ею путь.

1. $A(-1; -1)$, $B(3; 0)$, $C(4; 3)$, $D(-3; 4)$, $E(-3; -2)$.
2. $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(3; 3)$, $D(5; -3)$, $E(5; 1)$.
3. $A(5; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(-3; -1)$, $D(5; -3)$, $E(-7; -3)$.
4. $A(-1; -4)$, $B(5; 1)$, $C(8; 3)$, $D(4; 5)$, $E(-2; 5)$.
5. $A(-4; -2)$, $B(-2; 3)$, $C(1; -1)$, $D(5; -3)$, $E(5; 3)$.
6. $A(3; 4)$, $B(-5; 2)$, $C(-2; -3)$, $D(3; -4)$, $E(7; -4)$.
7. $A(5; 4)$, $B(2; 6)$, $C(-5; -1)$, $D(-2; -3)$, $E(-2; -5)$.
8. $A(3; -7)$, $B(6; -1)$, $C(2; 1)$, $D(3; 4)$, $E(-3; 4)$.
9. $A(-4; 2)$, $B(2; -4)$, $C(5; 1)$, $D(1; 0)$, $E(1; 6)$.
10. $A(3; 2)$, $B(1; -3)$, $C(8; -2)$, $D(5; 4)$, $E(-1; 4)$.

№ 7. Даны координаты точек A и B. Найти координаты такой точки M на прямой AB, что $AM = \lambda MB$, и при этом:

а) M лежит внутри отрезка AB;

б) M лежит вне отрезка AB.

1. $A(-3; 8)$, $B(2; 18)$, $\lambda = 3/2$.
2. $A(-5; 2)$, $B(17; 13)$, $\lambda = 4/7$.
3. $A(2; 6)$, $B(-22; 10)$, $\lambda = 3/5$.
4. $A(2; -10)$, $B(9; 4)$, $\lambda = 2/5$.
5. $A(-6; 8)$, $B(8; -13)$, $\lambda = 4/3$.
6. $A(9; 12)$, $B(-9; 39)$, $\lambda = 7/2$.
7. $A(-5; 17)$, $B(5; -3)$, $\lambda = 7/2$.
8. $A(13; 14)$, $B(-1; 7)$, $\lambda = 1/6$.
9. $A(-12; 3)$, $B(10; -30)$, $\lambda = 3/8$.
10. $A(6; -5)$, $B(-18; 19)$, $\lambda = 7/5$.

№ 8. В точках A_1, A_2 и A_3 сосредоточены неизвестные массы m_1, m_2 и m_3, соответственно. Центр масс этой системы находится в точке C. Найти указанные массы. Единственно ли решение задачи? Почему?

1. $A_1(-1; 4; 6)$, $A_2(-1; 4; 10)$, $A_3(-7; -3; -5)$, $C(-41/11; 9/11; 35/11)$.
2. $A_1(-3; -6; 5)$, $A_2(3; -4; 9)$, $A_3(-6; 3; -10)$, $C(-1; -8/9; 5/9)$.
3. $A_1(7; -3; 2)$, $A_2(-4; 1; -4)$, $A_3(-4; -2; 4)$, $C(-4; -4/5; 4/5)$.
4. $A_1(10; 1; 1)$, $A_2(-1; -10; 7)$, $A_3(-10; 8; 3)$, $C(-22/7; -40/7; 127/21)$.
5. $A_1(6; 3; 6)$, $A_2(-3; 10; -1)$, $A_3(6; -8; 5)$, $C(12/11; 20/11; 19/11)$.
6. $A_1(-9; -5; 3)$, $A_2(-10; 8; 4)$, $A_3(-5; 7; 7)$, $C(-65/8; 61/8; 41/8)$.
7. $A_1(6; -5; 0)$, $A_2(7; 10; 10)$, $A_3(-8; 5; -9)$, $C(14/17; 135/17; 37/17)$.
8. $A_1(-10; 3; 10)$, $A_2(9; -2; -1)$, $A_3(3; -8; -10)$, $C(31/5; -24/5; -26/5)$.
9. $A_1(4; 5; 7)$, $A_2(4; -1; -1)$, $A_3(3; -4; -8)$, $C(83/22; -37/22; -57/22)$.
10. $A_1(-7; 4; 1)$, $A_2(-3; -8; 2)$, $A_3(8; 10; 7)$, $C(2/3; -2; 11/3)$.

№ 9. Разложить вектор $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Сделать чертеж.

1. $\vec{b} = \{1; 10\}, \vec{a}_1 = \{4; 1\}, \vec{a}_2 = \{1; -3\}$.
2. $\vec{b} = \{-7; -15\}, \vec{a}_1 = \{1; 3\}, \vec{a}_2 = \{-2; -3\}$.
3. $\vec{b} = \{0; 4\}, \vec{a}_1 = \{-1; 4\}, \vec{a}_2 = \{-2; 4\}$.
4. $\vec{b} = \{-6; 9\}, \vec{a}_1 = \{-3; -3\}, \vec{a}_2 = \{-1; 4\}$.
5. $\vec{b} = \{5; -4\}, \vec{a}_1 = \{3; -3\}, \vec{a}_2 = \{-1; 2\}$.
6. $\vec{b} = \{-7; 17\}, \vec{a}_1 = \{-1; -4\}, \vec{a}_2 = \{-3; 3\}$.
7. $\vec{b} = \{-10; -2\}, \vec{a}_1 = \{4; 1\}, \vec{a}_2 = \{2; 1\}$.
8. $\vec{b} = \{-5; -8\}, \vec{a}_1 = \{-1; -2\}, \vec{a}_2 = \{-3; -4\}$.
9. $\vec{b} = \{16; 17\}, \vec{a}_1 = \{-1; -2\}, \vec{a}_2 = \{-5; -5\}$.
10. $\vec{b} = \{-10; 9\}, \vec{a}_1 = \{-3; 5\}, \vec{a}_2 = \{-4; -1\}$.

№ 10. Даны длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, а также угол φ между ними. Найти:

а) угол между векторами $\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ и $\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$;

б) модуль векторного произведения $\left|\left(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\right) \times \left(\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}\right)\right|$.

1. $|\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 10, \varphi = 45°, \alpha_1 = 2, \beta_1 = -3, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 4$.

2. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 9, \varphi = 150°, \alpha_1 = -1, \beta_1 = 6, \alpha_2 = 5, \beta_2 = 2.$
3. $|\vec{a}| = 16, |\vec{b}| = 4, \varphi = 120°, \alpha_1 = 3, \beta_1 = 2, \alpha_2 = -2, \beta_2 = 7.$
4. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 7, \varphi = 60°, \alpha_1 = 6, \beta_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 5.$
5. $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 11, \varphi = 135°, \alpha_1 = 4, \beta_1 = 1, \alpha_2 = 2, \beta_2 = -3.$
6. $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12, \varphi = 60°, \alpha_1 = -5, \beta_1 = 2, \alpha_2 = 6, \beta_2 = 1.$
7. $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 8, \varphi = 30°, \alpha_1 = 8, \beta_1 = 3, \alpha_2 = -1, \beta_2 = 4.$
8. $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 6, \varphi = 135°, \alpha_1 = 7, \beta_1 = 2, \alpha_2 = -3, \beta_2 = 4.$
9. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 17, \varphi = 45°, \alpha_1 = 4, \beta_1 = 9, \alpha_2 = 1, \beta_2 = -1.$
10. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 14, \varphi = 150°, \alpha_1 = 5, \beta_1 = -2, \alpha_2 = 4, \beta_2 = 6.$

№ 11. Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти:
а) радиус окружности, описанной возле него;
б) длину высоты *CH*, проведенной в этом треугольнике.

1. $A(1; –3; 5)$, $B(0; 6; –2)$, $C(4; 3; 8)$.
2. $A(5; 3; –7)$, $B(2; 4; –5)$, $C(1; 3; 4)$.
3. $A(3; 0; 9)$, $B(5; –3; 6)$, $C(1; 4; 2)$.
4. $A(3; 7; 2)$, $B(–2; 5; 2)$, $C(6; 3; 0)$.
5. $A(–2; 2; 3)$, $B(8; 4; 6)$, $C(4; 3; 2)$.
6. $A(1; 0; –7)$, $B(4; 6; –8)$, $C(5; 4; –6)$.
7. $A(4; 5; 6)$, $B(9; –2; 4)$, $C(3; 6; 5)$.
8. $A(4; 1; 6)$, $B(3; 5; 8)$, $C(3; 7; 7)$.
9. $A(0; 4; –3)$, $B(3; 1; –3)$, $C(9; 3; 2)$.
10. $A(2; –4; 3)$, $B(8; –6; 5)$, $C(3; 4; 1)$.

№ 12. Известны координаты вектора $\vec{a}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{r}$ и векторное произведение $\vec{a} \times \vec{r}$. Найти координаты вектора $\vec{r}$.

1. $\vec{a} = \{2; -5; 4\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 24, \vec{a} \times \vec{r} = \{-15; 18; 30\}.$
2. $\vec{a} = \{3; 2; 7\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 32, \vec{a} \times \vec{r} = \{31; -8; -11\}.$
3. $\vec{a} = \{6; 8; 2\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = -18, \vec{a} \times \vec{r} = \{16; -2; -40\}.$
4. $\vec{a} = \{-3; 7; 3\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = -17, \vec{a} \times \vec{r} = \{6; 3; -1\}.$
5. $\vec{a} = \{8; 9; 0\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 69, \vec{a} \times \vec{r} = \{63; -56; 13\}.$
6. $\vec{a} = \{-1; 6; 4\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 28, \vec{a} \times \vec{r} = \{22; 21; -26\}.$
7. $\vec{a} = \{4; -9; 2\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = -12, \vec{a} \times \vec{r} = \{-13; -2; 17\}.$
8. $\vec{a} = \{7; 3; -1\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 29, \vec{a} \times \vec{r} = \{5; -2; 29\}.$
9. $\vec{a} = \{4; 8; 3\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = 34, \vec{a} \times \vec{r} = \{7; -5; 4\}.$
10. $\vec{a} = \{5; 1; -2\}, \vec{a} \cdot \vec{r} = -8, \vec{a} \times \vec{r} = \{14; -30; 20\}.$

№ 13. Найти площадь плоского многоугольника, вершины которого перечислены в порядке обхода.

1. $A(–4; –2)$, $B(–1; 4)$, $C(5; 3)$, $D(6; –3)$, $E(0; –4)$.
2. $A(3; 6)$, $B(–4; 1)$, $C(0; –3)$, $D(2; 1)$, $E(5; –2)$.
3. $A(3; 5)$, $B(5; 2)$, $C(1; 1)$, $D(2; –3)$, $E(–5; –1)$.
4. $A(2; 3)$, $B(–3; –5)$, $C(–6; 2)$, $D(–3; –3)$, $E(3; –2)$.
5. $A(1; 4)$, $B(4; 5)$, $C(5; –4)$, $D(1; –6)$, $E(–1; 7)$.

6. $A(-6; 1)$, $B(-1; -5)$, $C(4; -3)$, $D(3; 3)$, $E(-2; 6)$.
7. $A(-2; -1)$, $B(4; 7)$, $C(-1; 2)$, $D(-2; -2)$, $E(7; -4)$.
8. $A(3; 6)$, $B(-3; 2)$, $C(-1; -3)$, $D(6; -2)$, $E(8; 4)$.
9. $A(6; -4)$, $B(4; 4)$, $C(3; 1)$, $D(-1; 6)$, $E(-3; -3)$.
10. $A(2; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(1; 6)$, $D(6; 5)$, $E(8; 2)$.

№ 14. Выяснить ориентацию заданной тройки векторов.

1. а) $\vec{a} = \{-3; 6; 7\}, \vec{b} = \{2; 5; 2\}, \vec{c} = \{3; 8; -1\}$;
   б) $\vec{a} = \{3; 7; -8\}, \vec{b} = \{4; 1; -4\}, \vec{c} = \{5; 2; 3\}$.
2. а) $\vec{a} = \{-5; 1; 4\}, \vec{b} = \{6; -2; 3\}, \vec{c} = \{3; -4; 6\}$;
   б) $\vec{a} = \{9; 1; 4\}, \vec{b} = \{-3; 3; 4\}, \vec{c} = \{2; 1; 6\}$.
3. а) $\vec{a} = \{2; 9; -5\}, \vec{b} = \{1; 7; 7\}, \vec{c} = \{4; 3; 2\}$;
   б) $\vec{a} = \{1; 2; 3\}, \vec{b} = \{7; 22; 19\}, \vec{c} = \{2; 8; 5\}$.
4. а) $\vec{a} = \{6; 1; 4\}, \vec{b} = \{1; 4; 8\}, \vec{c} = \{2; 2; 5\}$;
   б) $\vec{a} = \{-3; 6; -8\}, \vec{b} = \{2; 5; -6\}, \vec{c} = \{1; 3; 4\}$.
5. а) $\vec{a} = \{5; 7; -1\}, \vec{b} = \{2; 3; 5\}, \vec{c} = \{-4; 1; 3\}$;
   б) $\vec{a} = \{3; 3; 7\}, \vec{b} = \{1; 4; 8\}, \vec{c} = \{5; 2; 6\}$.
6. а) $\vec{a} = \{-2; 6; 6\}, \vec{b} = \{4; 7; 2\}, \vec{c} = \{-8; 5; 10\}$;
   б) $\vec{a} = \{-6; 3; 3\}, \vec{b} = \{4; 1; 6\}, \vec{c} = \{5; 3; 7\}$.
7. а) $\vec{a} = \{4; 9; -3\}, \vec{b} = \{7; 1; 4\}, \vec{c} = \{8; 2; 5\}$;
   б) $\vec{a} = \{1; 5; 6\}, \vec{b} = \{4; 2; -3\}, \vec{c} = \{-9; 2; 7\}$.
8. а) $\vec{a} = \{2; 6; 8\}, \vec{b} = \{3; 5; 5\}, \vec{c} = \{7; 2; -8\}$;
   б) $\vec{a} = \{5; 2; 4\}, \vec{b} = \{-9; 2; -5\}, \vec{c} = \{6; 8; 7\}$.
9. а) $\vec{a} = \{6; 9; -1\}, \vec{b} = \{2; 4; 6\}, \vec{c} = \{3; 4; -2\}$;
   б) $\vec{a} = \{8; -7; 4\}, \vec{b} = \{4; 5; 8\}, \vec{c} = \{3; 2; 2\}$.
10. а) $\vec{a} = \{3; 9; 2\}, \vec{b} = \{1; 6; -5\}, \vec{c} = \{2; 4; 1\}$;
    б) $\vec{a} = \{-5; 3; 8\}, \vec{b} = \{2; 1; 9\}, \vec{c} = \{4; 2; -7\}$.

№ 15. Даны координаты вершин тетраэдра *ABCD*. Найти длину высоты, опущенной из вершины *D*.

1. $A(7; -6; -7)$, $B(2; 6; 9)$, $C(1; -1; 0)$, $D(-6; -2; 9)$.
2. $A(9; 0; 8)$, $B(7; -8; -9)$, $C(7; 0; -1)$, $D(-4; -8; 3)$.
3. $A(-8; 2; -7)$, $B(9; -3; -7)$, $C(-3; 4; -5)$, $D(-2; 9; -6)$.
4. $A(2; -4; -4)$, $B(-3; 3; -8)$, $C(-6; -4; -7)$, $D(-5; -9; 3)$.
5. $A(5; -9; 0)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(8; 8; -1)$, $D(-9; 6; 2)$.
6. $A(-3; -9; 6)$, $B(5; -1; -5)$, $C(-4; -5; -8)$, $D(-1; -8; -6)$.
7. $A(-2; -5; 8)$, $B(9; 2; -4)$, $C(-3; 6; -3)$, $D(3; -2; 3)$.

8. $A(3; -9; 0)$, $B(-3; 4; 5)$, $C(5; -8; 7)$, $D(3; 3; 0)$.
9. $A(2; 0; -6)$, $B(-9; -5; -9)$, $C(2; 7; 3)$, $D(8; 2; 8)$.
10. $A(-3; -7; -8)$, $B(-1; -4; 6)$, $C(-5; 6; 9)$, $D(8; -7; -3)$.

№ 16. Доказать, что точки A, B, C, D, E лежат в одной плоскости.
1. $A(-4; 20; 11)$, $B(14; -17; 7)$, $C(13; 6; 33)$, $D(7; 1; 13)$, $E(-3; -3; -15)$.
2. $A(-6; 1; 0)$, $B(16; 6; 7)$, $C(18; 17; 5)$, $D(8; 6; 4)$, $E(-8; -10; 2)$.
3. $A(-1; -7; -7)$, $B(13; 20; 20)$, $C(9; 4; 33)$, $D(7; 7; 12)$, $E(3; 9; -20)$.
4. $A(-4; 8; 0)$, $B(14; -5; 16)$, $C(13; 7; 28)$, $D(7; 2; 12)$, $E(-3; -4; -12)$.
5. $A(-9; 11; -7)$, $B(10; 5; 20)$, $C(-12; 15; 33)$, $D(-1; 9; 12)$, $E(13; 1; -20)$.
6. $A(9; 11; 5)$, $B(-4; 3; 3)$, $C(16; 13; 28)$, $D(7; 9; 12)$, $E(-9; 1; -8)$.
7. $A(5; 23; 4)$, $B(-1; -7; 3)$, $C(14; 23; 8)$, $D(6; 13; 5)$, $E(-6; -11; 1)$.
8. $A(3; 4; 15)$, $B(4; 16; -7)$, $C(14; 16; 28)$, $D(7; 12; 12)$, $E(-1; 12; -16)$.
9. $A(-2; -1; -5)$, $B(8; 22; 13)$, $C(3; 12; -2)$, $D(3; 11; 2)$, $E(7; 19; 14)$.
10. $A(0; 12; 7)$, $B(2; 4; 1)$, $C(7; 14; 16)$, $D(3; 10; 8)$, $E(-1; 2; -4)$.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Размерность матриц и сами матрицы, фигурирующие в той или иной задаче, вводятся пользователем. Перед вычислениями программа должна проверять возможность их выполнения (контролировать размерность матриц при сложении или умножении и т.д.).

№ 1. Написать программу, вычисляющую сумму, разность, произведение матриц.

№ 2. Запрограммировать вычисление определителя:
а) рекурсивно – раскрытием по строке или столбцу (дополнительные исходные данные: указание на раскрытие определителя по строке или столбцу, номер строки / столбца);
б) с помощью элементарных преобразований строк и столбцов.

№ 3. Модифицировать программу № 2 так, чтобы она вычисляла ранг прямоугольной матрицы (любым методом).

№ 4. Запрограммировать вычисление обратной матрицы:
а) нахождением матрицы, взаимной к заданной;
б) с помощью элементарных преобразований.

№ 5. Написать программу, решающую систему линейных уравнений с квадратной матрицей:

а) методом Гаусса;
б) методом Крамера;
в) методом обратной матрицы.

Замечание. В качестве теста для № 4 можно использовать умножение найденной матрицы на исходную – в результате должна получиться единичная матрица. Для проверки № 5 можно умножить матрицу системы на столбец, содержащий найденные значения неизвестных; в итоге должен получиться столбец свободных членов. Возможные расхождения результата умножения с эталонным должны быть в рамках машинной погрешности.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Я с детства не любил овал!
Я с детства угол рисовал!

П. Коган, «Гроза»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Явное, неявное и параметрическое задание линий в декартовой системе координат.
2. Полярная система координат.
3. Простейшие преобразования плоскости: растяжения, проекции, повороты. Линейные свойства и матрицы преобразований.
4. Виды уравнения прямой на плоскости.
5. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми.
6. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
7. Эллипс: каноническое уравнение и свойства.
8. Каноническое уравнение и свойства гиперболы.
9. Каноническое уравнение и свойства параболы.
10. Оптические свойства линий второго порядка.
11. Уравнение кривой второго порядка в полярных координатах.
12. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.

Профильный уровень

1. Описание сдвигов и поворотов плоскости с помощью операций над комплексными числами.

2. Матричная запись простейших преобразований плоскости в однородных координатах.
3. Алгоритм Брезенхэма рисования прямых линий.
4. Алгоритм Ву рисования прямых линий со сглаживанием.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Одна и та же кривая построена в декартовой системе координат Oxy и в совмещенной с ней полярной системе (r, φ). Известно, что функция $y(x)$ монотонно возрастает и $y(0) = 0$. Какие значения принимает φ?
2. Пользуясь формулами перехода от одной системы координат к другой, доказать, что преобразование поворота вокруг начала координат не меняет расстояния между точками.
3. Материальная точка запускается из начала координат под острым углом α к положительному направлению оси Ox и летит с постоянной скоростью u. Долетев до прямой $y = h$ $(h > 0)$, точка отражается от нее под тем же углом и летит далее, затем отражается от оси Ox и т.д. Найти координаты точки через время T после начала движения.
4. Эллипс и гипербола имеют одни и те же фокусы. Могут ли асимптоты гиперболы проходить через противоположные (по диагонали) вершины основного прямоугольника данного эллипса?
5. Определить координаты фокусов гиперболы $y = k/x$.
6. Найти на параболе $y = x^2$ все точки, находящиеся на расстоянии $l = 1/\sqrt{2}$ от точки $M_0(1/2;\ 1/2)$.
7. Сколько решений может иметь предыдущая задача в зависимости от величины l и координат точки M_0? Указать максимальное и минимальное количество решений, ответ обосновать.
8. Найти уравнение директрисы параболы $y = ax^2 + bx + c$.
9. В параболе $y = ax^2 + bx + c$ проведена хорда, соединяющая точки с абсциссами x_1 и x_2. Доказать, что она параллельна касательной к параболе, проведенной в точке с абсциссой $(x_1 + x_2)/2$.
10. *Лемниската Бернулли* – это множество точек M, произведение расстояний от которых до двух данных фокусов равно квадрату половины межфокусного расстояния. Вывести уравнение лемнискаты. Какими свойствами симметрии обладает эта кривая?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Замечание. В нескольких вариантах заданий №№ 1, 2 функции $r(\varphi)$, $x(t)$, $y(t)$ определены не во всех точках указанных отрезков.

№ 1. Нарисовать «по точкам» кривую $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат при $\varphi\in[\varphi_1;\ \varphi_2]$ с шагом вычислений $\Delta\varphi$.

1. $r = 1 + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\,, \varphi \in [0; 2\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{12}.$
2. $r = \varphi + \frac{1}{\varphi}, \varphi \in [0; 4\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$
3. $r = \left(\frac{5}{4}\right)^{-\varphi}, \varphi \in [-4\pi; 0], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$
4. $r = \frac{1}{\varphi^2}, \varphi \in [-3\pi; 3\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}.$
5. $r = 3\left[1 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right], \varphi \in [0; 2\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{12}.$
6. $r = \left(1 + \frac{1}{4}\cos 6\varphi\right)(1 + \cos\varphi), \varphi \in [0; 2\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{12}.$
7. $r = \varphi\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right), \varphi \in [0; 4\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$
8. $r = |\varphi|, \varphi \in [-3\pi; 3\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$
9. $r = \varphi\left(1 + \frac{1}{6}\cos 6\varphi\right), \varphi \in [0; 4\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$
10. $r = \varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2}, \varphi \in [-2\pi; 2\pi], \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}.$

№ 2. Нарисовать «по точкам» кривую, заданную параметрически на некотором отрезке. Взять шаг вычислений по параметру, равный Δt.

1. $x(t) = e^{2t}(\cos t)^2, y(t) = e^{2t}(\sin t)^2, t \in [-2; 3], \Delta t = 0.2.$
2. $x(t) = t + \frac{1}{t}, y(t) = t + \frac{1}{t^2}, t \in [-4; 4], \Delta t = 0.4.$
3. $x(t) = 1 - 2(\cos\pi t)^3, y(t) = 1 - 3(\sin\pi t)^3, t \in [-1; 1], \Delta t = 0.1.$
4. $x(t) = \frac{6t}{1 + t^3}, y(t) = \frac{6t^2}{1 + t^3}, t \in [-0.7; 9.3], \Delta t = 0.4.$
5. $x(t) = \frac{2\cos t}{\sqrt{3 + \cos 5t}}, y(t) = \frac{2\sin t}{\sqrt{3 + \cos 5t}}, t \in [-\pi; \pi], \Delta t = \frac{\pi}{12}.$
6. $x(t) = t - 2\sin 2t\,, y(t) = 1 - \cos 2t\,, t \in [0; 2\pi], \Delta t = \frac{\pi}{12}.$
7. $x(t) = t - t^2, y(t) = 3t - t^3, t \in [-2.5; 2.5], \Delta t = 0.2.$
8. $x(t) = \operatorname{sh} t - 2t, y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t - 3, t \in [-3; 3], \Delta t = 0.25.$
9. $x(t) = \frac{2\cos t}{3 - \cos 3t}, y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos 3t}, t \in [0; 2\pi], \Delta t = \frac{\pi}{12}.$
10. $x(t) = t^3 - t, y(t) = t^2 - 1, t \in [-2; 2], \Delta t = 0.2.$

№ 3. В декартовой прямоугольной системе координат задан треугольник ABC. Изобразить треугольник и его образ, полученный в ходе преобразований: сдвиг на вектор $\vec{a}$ → растяжение вдоль оси Ox в k_x раз (растяжение вдоль оси Oy в k_y раз) → поворот на угол φ вокруг начала координат. Найти матрицу композиции преобразований.

1. $A(-3;2), B(6;1), C(3;3), \vec{a}=\{1;4\}, k_x=4, \varphi=-\pi/3.$
2. $A(8;7), B(2;0), C(-1;4), \vec{a}=\{2;-2\}, k_x=2, \varphi=\pi/4.$
3. $A(0;6), B(2;-4), C(3;5), \vec{a}=\{1;-3\}, k_y=3, \varphi=3\pi/4.$
4. $A(-2;5), B(1;4), C(3;2), \vec{a}=\{3;4\}, k_y=2, \varphi=-\pi/6.$
5. $A(-3;6), B(1;5), C(2;0), \vec{a}=\{-1;-2\}, k_y=4, \varphi=2\pi/3.$
6. $A(7;5), B(-3;4), C(-1;-2), \vec{a}=\{-2;5\}, k_x=3, \varphi=\pi/6.$
7. $A(3;9), B(6;-3), C(2;7), \vec{a}=\{-3;2\}, k_y=5, \varphi=-3\pi/4.$
8. $A(10;-2), B(6;4), C(3;8), \vec{a}=\{5;0\}, k_x=5, \varphi=\pi/3.$
9. $A(3;7), B(8;1), C(-2;3), \vec{a}=\{0;2\}, k_y=3, \varphi=-\pi/4.$
10. $A(-10;5), B(-7;5), C(-5;3), \vec{a}=\{4;2\}, k_x=2, \varphi=5\pi/6.$

№ 4. Проверить, что точка M_0 принадлежит прямой l. Найти на этой прямой все точки, расположенные на расстоянии d от M_0.

1. $M_0(2;-6), l: 4x-3y-26=0, d=10.$
2. $M_0(-1;3), l: 12x-5y+39=0, d=39.$
3. $M_0(-4;-2), l: 4x+3y+22=0, d=20.$
4. $M_0(-5;-1), l: 3x-2y+13=0, d=3\sqrt{13}.$
5. $M_0(7;2), l: x-7y+7=0, d=10\sqrt{2}.$
6. $M_0(-5;-4), l: x+3y+17=0, d=4\sqrt{10}.$
7. $M_0(8;-2), l: 8x-15y-94=0, d=34.$
8. $M_0(-3;2), l: 4x-7y+26=0, d=3\sqrt{65}.$
9. $M_0(5;3), l: 3x-5y-11=0, d=2\sqrt{34}.$
10. $M_0(0;4), l: 5x-12y+48=0, d=26.$

№ 5. Дан треугольник ABC (см. № 3). Найти:

а) точку пересечения его высот;

б) угол между стороной AB и высотой, проведенной из вершины B;

в) точку пересечения медианы AM с координатными осями.

№ 6. Доказать, что силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, приложенные в точках A_1, A_2, A_3, образуют сходящуюся систему, найти их равнодействующую и точку ее приложения.

1. $\vec{F}_1 = \{6;7\}, A_1(3;2), \vec{F}_2 = \{-2;3\}, A_2(1;-11),$
$\vec{F}_3 = \{9;-5\}, A_3(-3;-5).$
2. $\vec{F}_1 = \{-1;4\}, A_1(3;0), \vec{F}_2 = \{6;2\}, A_2(-7;1), \vec{F}_3 = \{3;10\}, A_3(5;14).$
3. $\vec{F}_1 = \{6;9\}, A_1(11;-5), \vec{F}_2 = \{-1;2\}, A_2(12;14),$
$\vec{F}_3 = \{8;5\}, A_3(1;-6).$
4. $\vec{F}_1 = \{9;5\}, A_1(-12;1), \vec{F}_2 = \{-3;2\}, A_2(9;9), \vec{F}_3 = \{4;1\}, A_3(-6;8).$
5. $\vec{F}_1 = \{4;3\}, A_1(8;-7), \vec{F}_2 = \{6;7\}, A_2(2;-14),$
$\vec{F}_3 = \{2;11\}, A_3(6;-18).$
6. $\vec{F}_1 = \{8;3\}, A_1(-16;13), \vec{F}_2 = \{7;-5\}, A_2(7;14),$
$\vec{F}_3 = \{-3;5\}, A_3(6;9).$
7. $\vec{F}_1 = \{6;8\}, A_1(11;-4), \vec{F}_2 = \{2;-5\}, A_2(8;15),$
$\vec{F}_3 = \{11;4\}, A_3(-8;-8).$
8. $\vec{F}_1 = \{10;3\}, A_1(17;-3), \vec{F}_2 = \{4;7\}, A_2(7;-6),$
$\vec{F}_3 = \{-3;-5\}, A_3(10;-1).$
9. $\vec{F}_1 = \{-2;9\}, A_1(7;16), \vec{F}_2 = \{6;3\}, A_2(-9;-2),$
$\vec{F}_3 = \{5;7\}, A_3(-1;-7).$
10. $\vec{F}_1 = \{4;-8\}, A_1(10;-2), \vec{F}_2 = \{6;11\}, A_2(-1;-3),$
$\vec{F}_3 = \{3;2\}, A_3(2;6).$

Замечание. Система сил называется *сходящейся*, если их линии действия пересекаются в одной точке. Ее равнодействующая равна векторной сумме сил и прикладывается в точке пересечения их линий действия. *Линия действия* – это прямая, проходящая через точку приложения силы параллельно этой силе.

№ 7. Движение «Титаника» задается уравнениями $x = x_T(t)$, $y = y_T(t)$, а движение айсберга – уравнениями $x = x_A(t)$, $y = y_A(t)$. Встретятся ли «Титаник» и айсберг?

1. $x_T(t) = 4t - 9, y_T(t) = 7t - 26, x_A(t) = 6t - 15, y_A(t) = 2t - 11.$
2. $x_T(t) = 5t - 6, y_T(t) = -2t + 10, x_A(t) = 7t - 31, y_A(t) = 8t - 34.$
3. $x_T(t) = 2t - 4, y_T(t) = t - 7, x_A(t) = 6t - 20, y_A(t) = -3t + 9.$
4. $x_T(t) = -3t + 23, y_T(t) = 2t - 4, x_A(t) = 5t, y_A(t) = 9t - 1.$
5. $x_T(t) = 6t - 24, y_T(t) = 7t - 33, x_A(t) = 9t - 30, y_A(t) = 4t - 14.$
6. $x_T(t) = -6t + 47, y_T(t) = 3t - 12, x_A(t) = t - 2, y_A(t) = 8t - 47.$
7. $x_T(t) = -3t, y_T(t) = 5t - 13, x_A(t) = 2t - 19, y_A(t) = 5t - 48.$
8. $x_T(t) = t + 4, y_T(t) = 6t - 28, x_A(t) = 4t - 11, y_A(t) = -5t + 27.$
9. $x_T(t) = -2t - 2, y_T(t) = 7t - 10, x_A(t) = 4t - 14, y_A(t) = 9t - 14.$
10. $x_T(t) = 3t - 5, y_T(t) = -2t + 9, x_A(t) = 6t - 11, y_A(t) = 7t - 20.$

№ 8. Даны координаты точек A, B, C, D. Выяснить взаимное расположение прямых AB и CD.

1. а) $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(7; 5)$, $D(1; 1)$;
   б) $A(1; 4)$, $B(5; 2)$, $C(3; -1)$, $D(8; 8)$.
2. а) $A(-1; -5)$, $B(2; 1)$, $C(0; -3)$, $D(5; 7)$;
   б) $A(-5; 4)$, $B(-1; -2)$, $C(5; -4)$, $D(-1; 5)$.
3. а) $A(6; 4)$, $B(-3; -3)$, $C(2; 5)$, $D(-2; -5)$;
   б) $A(-5; 1)$, $B(3; -3)$, $C(5; -4)$, $D(-1; -1)$.
4. а) $A(-1; 0)$, $B(-4; -3)$, $C(-4; 2)$, $D(0; 6)$;
   б) $A(-4; 6)$, $B(-1; 5)$, $C(5; 3)$, $D(-7; 7)$.
5. а) $A(3; 9)$, $B(4; -2)$, $C(-6; 4)$, $D(-3; 1)$;
   б) $A(-3; 6)$, $B(-1; -2)$, $C(3; 5)$, $D(4; 1)$.
6. а) $A(1; 0)$, $B(2; -4)$, $C(-1; 8)$, $D(-2; 12)$;
   б) $A(8; 5)$, $B(3; 3)$, $C(4; 7)$, $D(9; 10)$.
7. а) $A(4; -4)$, $B(8; -2)$, $C(2; 6)$, $D(-4; 3)$;
   б) $A(0; 0)$, $B(6; 3)$, $C(4; 2)$, $D(8; 6)$.
8. а) $A(2; -9)$, $B(7; 1)$, $C(8; 3)$, $D(4; -5)$;
   б) $A(1; -2)$, $B(-5; 0)$, $C(-1; 4)$, $D(8; 1)$.
9. а) $A(-5; 5)$, $B(-3; 9)$, $C(2; 6)$, $D(6; 8)$;
   б) $A(0; -5)$, $B(9; 4)$, $C(-3; -8)$, $D(4; -4)$.
10. а) $A(-3; -3)$, $B(3; 5)$, $C(12; 4)$, $D(2; -8)$;
    б) $A(7; 4)$, $B(8; 7)$, $C(2; -1)$, $D(4; 9)$.

№ 9. Найти расстояние от прямой l до ближайшего фокуса кривой γ.

1. $l: 3x - 2y = -6, \gamma: y^2 = -8x.$
2. $l: -2y + 5x - 3 = 0, \gamma: \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$
3. $l: 6x + y - 12 = 0, \gamma: \dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1.$
4. $l: 4x + 7y + 14 = 0, \gamma: \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = -1.$
5. $l: 3y + 5x - 15 = 0, \gamma: x^2 + 6y = 0.$
6. $l: 2x + 4y = 5, \gamma: \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{289} = 1.$
7. $l: 2y + x - 4 = 0, \gamma: y = x^2 + 3.$
8. $l: -3x + 6y - 12 = 0, \gamma: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$
9. $l: 5x - 4y = -100, \gamma: \dfrac{x^2}{1600} - \dfrac{y^2}{900} = 1.$
10. $l: 7x + 2y + 14 = 0, \gamma: \dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{64} = -1.$

№ 10. Найти уравнение параболы, проходящей через заданные точки A, B, C, если ее ось симметрии параллельна оси Oy.

1. $A(-2; 23)$, $B(1; 5)$, $C(8; 103)$.
2. $A(-3; -18)$, $B(2; 17)$, $C(-7; -82)$.
3. $A(-5; -60)$, $B(1; 0)$, $C(2; -11)$.
4. $A(-6; 76)$, $B(2; 12)$, $C(3; 31)$.
5. $A(-3; 51)$, $B(1; -5)$, $C(5; 67)$.
6. $A(-2; -23)$, $B(3; -33)$, $C(4; -65)$.
7. $A(-4; 113)$, $B(3; 71)$, $C(5; 167)$.
8. $A(-5; -156)$, $B(1; 12)$, $C(2; -9)$.
9. $A(-2; 26)$, $B(4; -4)$, $C(9; 26)$.
10. $A(1; 7)$, $B(5; -77)$, $C(6; -118)$.

№ 11. Построить кривые γ_1 и γ_2, уравнения которых заданы в полярной системе координат. Найти полярные и декартовы координаты их точек пересечения.

1. $\gamma_1: r = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{5}{1 - 3\cos\varphi}$.
2. $\gamma_1: r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$.
3. $\gamma_1: r = \dfrac{3}{1 - 3\cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{4}{1 - 2\cos\varphi}$.
4. $\gamma_1: r = \dfrac{5}{1 - 4\cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{6}{4 - \cos\varphi}$.
5. $\gamma_1: r = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{9}{3 - \cos\varphi}$.
6. $\gamma_1: r = \dfrac{5}{5 - 2\cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{2}{1 - 4\cos\varphi}$.
7. $\gamma_1: r = \dfrac{7}{1 - \cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{3}{1 - 5\cos\varphi}$.
8. $\gamma_1: r = \dfrac{27}{3 - \cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{6}{1 - \cos\varphi}$.
9. $\gamma_1: r = \dfrac{8}{1 - 4\cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$.
10. $\gamma_1: r = \dfrac{5}{1 - \cos\varphi}, \gamma_2: r = \dfrac{28}{7 - 2\cos\varphi}$.

В заданиях №№ 12–13 требуется не только построить кривые второго порядка, но и найти их эксцентриситет, фокусы, директрисы и асимптоты (если имеются).

№ 12. Построить кривую второго порядка по заданному уравнению.

1. а) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 54y - 101 = 0$;
   б) $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

2. а) $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$;
   б) $9x^2 - 25y^2 - 90x - 100y - 100 = 0$.
3. а) $3y^2 - x - 12y + 18 = 0$;
   б) $4x^2 - y^2 + 48x + 10y + 155 = 0$.
4. а) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$;
   б) $4x^2 - 24x + 2y + 34 = 0$.
5. а) $25x^2 + 9y^2 + 50x - 72y - 56 = 0$;
   б) $4x^2 - 49y^2 - 56x + 196y + 196 = 0$.
6. а) $36x^2 - 25y^2 - 216x - 200y - 976 = 0$;
   б) $y^2 - 8x + 18y + 105 = 0$.
7. а) $9x^2 + y^2 + 72x + 6y + 144 = 0$;
   б) $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + 4 = 0$.
8. а) $y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$;
   б) $49x^2 - 4y^2 + 588x + 8y + 1564 = 0$.
9. а) $4x^2 + 25y^2 - 64x - 150y + 381 = 0$;
   б) $y^2 - 6x + 12y + 30 = 0$.
10. а) $x^2 + 6x + 10y - 11 = 0$;
    б) $x^2 + 16y^2 + 18x - 128y + 273 = 0$.

№ 13. Построить кривую второго порядка по ее общему уравнению.
1. $-256x^2 + 984xy + 31y^2 - 880x - 5340y + 1900 = 0$.
2. $144x^2 + 120xy + 25y^2 - 676x - 1014y - 507 = 0$.
3. $1476x^2 - 1200xy + 2281y^2 + 816x - 11356y + 4624 = 0$.
4. $1696x^2 - 840xy + 2529y^2 - 3536x - 7332y - 15548 = 0$.
5. $24xy - 7y^2 - 24x + 62y - 199 = 0$.
6. $225x^2 + 240xy + 64y^2 + 2278x + 1870y + 5491 = 0$.
7. $481x^2 - 384xy + 369y^2 - 1650x + 4050y + 5625 = 0$.
8. $25x^2 + 120xy + 144y^2 + 416x - 1638y + 676 = 0$.
9. $92x^2 + 408xy - 27y^2 - 1432x + 276y + 8180 = 0$.
10. $4176x^2 - 1680xy + 3049y^2 - 35088x + 12818y + 34969 = 0$.

№ 14. Построить область, ограниченную заданными линиями.
1. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 2x - 1$, $y = -3x + 9$.
2. $x^2 - y^2 = 16$, $x^2 - 4y^2 = 4$, $x - y - 8 = 0$.
3. $9x^2 + 16y^2 = 144$, $y = 2x - 1$, $x + y = 2$.
4. $y^2 + 2x + 4 = 0$, $x = -6$, $x = -3y - 12$.
5. $x = -4/y$, $16x^2 + 25y^2 = 400$, $x - 2y + 5 = 0$ (область меньшей площади).
6. $y = x + 4$, $x = 6$, $xy = 4$.
7. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = -3x + 1$, $y = 4x + 8$.
8. $2xy = 1$, $y = 1$, $2y = 2x^2 - 1$ (область большей площади).
9. $x^2 + 4y^2 = 4$, $y = x^2 - 1$, $y = 6$.

10. $xy = 4$, $y = -5x + 10$, $y = 2x + 3$.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Уравнения линий заранее задаются в тексте программы (синтаксический анализ выражений, введенных извне, не является целью работы). Остальные входные данные вводятся пользователем.

№ 1. Построить на экране кривую, заданную:
а) явным уравнением в декартовых координатах;
б) параметрическим уравнением в декартовых координатах;
в) уравнением в полярной системе координат.

№ 2. Построить на экране кривую, заданную явным или параметрическим уравнением в декартовых координатах, а также результат ее поворота на некоторый угол α вокруг некоторой точки $(x_0; y_0)$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вы параллельны ко всему,
А я, напротив, вертикален.

А. Ф. Вельтман

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Параметрическое задание линий и поверхностей в пространстве.
2. Цилиндрическая и сферическая системы координат.
3. Уравнения прямой в пространстве.
4. Уравнения плоскости в пространстве.
5. Расстояние от точки до плоскости.
6. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.
7. Взаимное расположение прямой и плоскости, угол между ними.
8. Взаимное расположение прямых. Расстояние между прямыми.
9. Уравнение поверхности вращения.
10. Эллипсоид и сфера.
11. Двуполостный и однополостный гиперболоиды. Конус.
12. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
13. Цилиндры. Пары плоскостей.

14. Общее уравнение поверхности второго порядка. Понятие о приведении уравнения к каноническому виду.
15. Построение поверхностей второго порядка методом сечений.

Профильный уровень

1. Описание преобразований пространства с помощью матриц. Запись преобразований в однородных координатах.
2. Углы Эйлера и их модификации: самолетные и навигационные углы.
3. Центральное проецирование в 3D-графике. Картинная и предметная плоскости, главная точка картины, главный луч и ось зрения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Три плоскости с векторами нормали $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$, соответственно, пересекаются по одной и той же прямой. Доказать, что найдутся такие коэффициенты k_1, k_2, k_3, что $k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 + k_3\vec{N}_3 = \vec{0}$, и при этом хотя бы один из них отличен от нуля.
2. Прямые l_1 и l_2 задаются уравнениями
$$l_1: \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}, l_2: \frac{x-b}{B} = \frac{y-c}{C} = \frac{z-a}{A},$$
соответственно. Каким условиям должны удовлетворять параметры a, b, c, A, B, C, чтобы через эти прямые можно было провести плоскость, и притом единственную?
3. Даны скрещивающиеся прямые l_1 и l_2. Точки M_1 и M_2, принадлежащие l_1 и l_2, соответственно, таковы, что расстояние M_1M_2 минимально. Вывести уравнение прямой M_1M_2, если заданы уравнения l_1 и l_2:
   а) $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}, l_2: \frac{x}{0} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$;
   б) предложить способ решения задачи в общем случае, когда две прямые имеют произвольные направляющие векторы и проходят через произвольные точки.
4. Поверхность образована множеством всех прямых, проходящих через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и образующих заданный острый угол α с плоскостью $A(x–x_0) + B(y–y_0) + C(z–z_0) = 0$. Определить тип этой поверхности. Вывести ее уравнение, если $B = C = 0$.
5. Нарисовать эскиз кривой $x = Rt\cos t, y = Rt\sin t, z = ht^2$. Параметр t может принимать любые действительные значения, величины R, h положительны.
6. Нарисовать эскиз поверхности: $x = R\cos u + r\cos u\cos v, y = R\sin u + r\sin u\cos v, z = r\sin v, u \in [0; 2\pi], v \in [-\pi/2; \pi/2]$, величины R и r положительны, причем $R > r$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Найти расстояние между точками M_1 и M_2, координаты которых заданы:

а) в цилиндрической системе $(r; \varphi; z)$;

б) в сферической системе $(r; \theta; \varphi)$, угол θ отсчитывается от положительного направления оси аппликат.

1. а) $r_1 = 4$, $\varphi_1 = \pi/6$, $z_1 = -2$; $r_2 = 3$, $\varphi_2 = -\pi/3$, $z_2 = 5$;
   б) $r_1 = 6$, $\theta_1 = \pi/3$, $\varphi_1 = -\pi/2$; $r_2 = 4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/6$.
2. а) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = \pi/4$, $z_1 = 9$; $r_2 = 2$, $\varphi_2 = \pi/2$, $z_2 = 0$;
   б) $r_1 = 2$, $\theta_1 = 3\pi/4$, $\varphi_1 = 2\pi/3$; $r_2 = 6$, $\theta_2 = \pi/6$, $\varphi_2 = -\pi$.
3. а) $r_1 = 3$, $\varphi_1 = 2\pi/3$, $z_1 = 3$; $r_2 = 5$, $\varphi_2 = \pi/6$, $z_2 = 6$;
   б) $r_1 = 4$, $\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/6$; $r_2 = 4$, $\theta_2 = \pi/3$, $\varphi_2 = 2\pi/3$.
4. а) $r_1 = 5$, $\varphi_1 = -3\pi/4$, $z_1 = 4$; $r_2 = 3$, $\varphi_2 = -\pi/3$, $z_2 = -2$;
   б) $r_1 = 8$, $\theta_1 = \pi/2$, $\varphi_1 = -3\pi/4$; $r_2 = 6$, $\theta_2 = \pi/6$, $\varphi_2 = \pi/3$.
5. а) $r_1 = 4$, $\varphi_1 = 5\pi/6$, $z_1 = 3$; $r_2 = 8$, $\varphi_2 = \pi/4$, $z_2 = 6$;
   б) $r_1 = 8$, $\theta_1 = \pi/4$, $\varphi_1 = -\pi/2$; $r_2 = 4$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\varphi_2 = \pi/6$.
6. а) $r_1 = 6$, $\varphi_1 = \pi/2$, $z_1 = 1$; $r_2 = 7$, $\varphi_2 = -\pi/3$, $z_2 = 3$;
   б) $r_1 = 3$, $\theta_1 = 5\pi/6$, $\varphi_1 = \pi/3$; $r_2 = 2$, $\theta_2 = \pi/4$, $\varphi_2 = -\pi/2$.
7. а) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 7\pi/6$, $z_1 = -5$; $r_2 = 5$, $\varphi_2 = -\pi/4$, $z_2 = 7$;
   б) $r_1 = 1$, $\theta_1 = \pi/3$, $\varphi_1 = \pi/6$; $r_2 = 4$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\varphi_2 = \pi/6$.
8. а) $r_1 = 7$, $\varphi_1 = -3\pi/4$, $z_1 = 8$; $r_2 = 4$, $\varphi_2 = \pi/4$, $z_2 = 3$;
   б) $r_1 = 6$, $\theta_1 = \pi/4$, $\varphi_1 = \pi/3$; $r_2 = 6$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\varphi_2 = 4\pi/3$.
9. а) $r_1 = 5$, $\varphi_1 = \pi/6$, $z_1 = 9$; $r_2 = 2$, $\varphi_2 = 2\pi/3$, $z_2 = 0$;
   б) $r_1 = 3$, $\theta_1 = 2\pi/3$, $\varphi_1 = \pi/2$; $r_2 = 6$, $\theta_2 = 5\pi/6$, $\varphi_2 = \pi/4$.
10. а) $r_1 = 2$, $\varphi_1 = -\pi/4$, $z_1 = 3$; $r_2 = 3$, $\varphi_2 = \pi/3$, $z_2 = -7$;
    б) $r_1 = 4$, $\theta_1 = \pi/4$, $\varphi_1 = -\pi/6$; $r_2 = 2$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\varphi_2 = \pi/2$.

№ 2. Найти на плоскости α все точки, удаленные от точки M_0 на расстояние d.

1. а) α: $2x - 2y + 5z + 3 = 0$, $M_0(-3; 7; 3)$, $d = 2$;
   б) α: $3x + y + z + 5 = 0$, $M_0(7; -2; 2)$, $d = 4$.
2. а) α: $-2x + 4y + 3z + 2 = 0$, $M_0(4; -3; 2)$, $d = 2$;
   б) α: $3x - 12y + 4z - 4 = 0$, $M_0(5; -2; 1)$, $d = 3$.
3. а) α: $3x + 5y + 7z - 3 = 0$, $M_0(2; 3; 1)$, $d = 1$;
   б) α: $x + 9y - 2z + 1 = 0$, $M_0(-3; 5; 2)$, $d = 5$.
4. а) α: $7x - 4y - 4z + 3 = 0$, $M_0(4; 0; 3)$, $d = 5$;
   б) α: $-3x - 4y - 8z + 2 = 0$, $M_0(2; 5; 1)$, $d = 3$.

5. а) α: $-2x + 6y - 3z + 2 = 0$, $M_0(-4; 1; -4)$, $d = 4$;
   б) α: $5x + 2y - 6z - 1 = 0$, $M_0(3; 6; 5)$, $d = 2$.
6. а) α: $6x - 2y + 5z + 2 = 0$, $M_0(1; 4; -3)$, $d = 1$;
   б) α: $3x + 4y - 9z - 5 = 0$, $M_0(3; 5; -4)$, $d = 7$.
7. а) α: $3x + 9y - 5z + 4 = 0$, $M_0(5; -2; 6)$, $d = 4$;
   б) α: $2x + y - z + 7 = 0$, $M_0(7; 2; 3)$, $d = 6$.
8. а) α: $2x - 4y - 5z + 6 = 0$, $M_0(3; -5; 0)$, $d = 5$;
   б) α: $6x + 2y - 3z + 4 = 0$, $M_0(2; 4; 1)$, $d = 3$.
9. а) α: $-4x + 3y - 9z + 6 = 0$, $M_0(5; 2; 2)$, $d = 2$;
   б) α: $5x + y - 7z + 4 = 0$, $M_0(1; -3; 4)$, $d = 3$.
10. а) α: $-4x + 3y + 12z + 2 = 0$, $M_0(6; 4; 3)$, $d = 2$;
   б) α: $5x + 4y - 7z - 8 = 0$, $M_0(3; 5; 7)$, $d = 2$.

№ 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой AB и пересекающей эту прямую.

1. $M_0(1; 10; -5)$, $A(6; -3; 5)$, $B(2; 4; 7)$.
2. $M_0(12; -7; 0)$, $A(-3; 7; 7)$, $B(4; 1; -6)$.
3. $M_0(-5; -8; 2)$, $A(9; -6; 4)$, $B(0; -6; -5)$.
4. $M_0(4; -11; 5)$, $A(5; 8; 14)$, $B(-9; 7; -5)$.
5. $M_0(14; 0; 3)$, $A(18; 6; -8)$, $B(10; 4; -6)$.
6. $M_0(7; 3; 12)$, $A(0; -7; 4)$, $B(5; 9; -2)$.
7. $M_0(6; 11; 16)$, $A(-14; -4; 6)$, $B(18; -3; -9)$.
8. $M_0(-7; -10; -4)$, $A(6; 12; 13)$, $B(21; 0; -5)$.
9. $M_0(8; 23; 7)$, $A(4; 1; -15)$, $B(9; 4; 6)$.
10. $M_0(-10; 2; 7)$, $A(6; 9; -6)$, $B(4; 11; 8)$.

№ 4. Плоскость ABC служит границей раздела двух сред: 1 и 2. На эту плоскость падает луч света, проходящий через точку M_0 в среде 1 параллельно вектору $\vec{a}$. Записать:
   а) уравнение отраженного луча в среде 1;
   б) уравнение преломленного луча в среде 2, если задан коэффициент преломления n_{12}.

1. $A(5; -8; 2)$, $B(2; 3; 7)$, $C(0; 3; -1)$, $M_0(4; 3; 4)$, $\vec{a} = \{-1; 5; 2\}$, $n_{12} = 7/6$.
2. $A(4; 6; 3)$, $B(-9; 1; 1)$, $C(4; 8; -3)$, $M_0(-1; 0; 2)$, $\vec{a} = \{2; 1; 3\}$, $n_{12} = 4$.
3. $A(6; 7; -2)$, $B(5; 4; 8)$, $C(5; -3; 3)$, $M_0(6; 2; 2)$, $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $n_{12} = 4/3$.
4. $A(5; 0; -3)$, $B(6; 4; 0)$, $C(3; -1; 10)$, $M_0(5; 0; 4)$, $\vec{a} = \{-4; 0; 6\}$, $n_{12} = 7/5$.
5. $A(1; 9; 7)$, $B(1; -3; 8)$, $C(6; 9; -7)$, $M_0(2; -2; 4)$, $\vec{a} = \{5; 1; 2\}$, $n_{12} = 8/3$.
6. $A(-4; 3; 5)$, $B(6; 9; 6)$, $C(3; 2; 0)$, $M_0(-7; 1; 3)$, $\vec{a} = \{2; -1; 1\}$, $n_{12} = 5/4$.
7. $A(5; -4; 0)$, $B(3; -8; 2)$, $C(1; 5; 10)$, $M_0(2; 2; 3)$, $\vec{a} = \{0; 4; -3\}$, $n_{12} = 5/3$.
8. $A(2; 7; 8)$, $B(0; -3; 5)$, $C(-4; 3; -4)$, $M_0(1; 6; 5)$, $\vec{a} = \{6; 2; 3\}$, $n_{12} = 3$.

9. $A(6; -3; 5)$, $B(8; 6; 6)$, $C(10; 0; 12)$, $M_0(4; 5; -2)$, $\vec{a} = \{2; 4; 2\}$, $n_{12} = 3/2$.
10. $A(0; 7; -3)$, $B(5; -3; 6)$, $C(3; 4; 7)$, $M_0(8; 1; 0)$, $\vec{a} = \{-2; 3; 0\}$, $n_{12} = 2$.

Замечание. Падающий, отраженный, преломленный лучи, а также нормаль к поверхности, проведенная в точке падения, лежат в одной плоскости. Углы α и β, образуемые падающим (в среде 1) и преломленным (в среде 2) лучами с нормалью к поверхности, подчиняются *закону Снеллиуса*: $\sin\alpha / \sin\beta = n_{12}$.

№ 5. Между источником света S и плоским экраном α расположен треугольник $A_1A_2A_3$, выполненный из светонепроницаемого материала. Найти площадь тени, отбрасываемой треугольником на экран.

1. $S(6; -1; 2)$, α: $x + 2y + 2z - 15 = 0$, $A_1(2; 3; 2)$, $A_2(1; 4; 2)$, $A_3(0; 3; 2)$.
2. $S(3; 2; 5)$, α: $4x + y + 3z - 12 = 0$, $A_1(1; 1; 5)$, $A_2(3; 3; 1)$, $A_3(2; 2; 1)$.
3. $S(-2; 1; 4)$, α: $2x - 5y + 3z - 12 = 0$, $A_1(0; -1; 2)$, $A_2(5; 2; 2)$, $A_3(0; 1; 3)$.
4. $S(5; 2; 4)$, α: $4x - 2y + 2z + 17 = 0$, $A_1(1; 6; 3)$, $A_2(0; -2; 3)$, $A_3(4; 3; 3)$.
5. $S(4; -1; 1)$, α: $3x - 2y + 5z - 10 = 0$, $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(2; 4; 3)$, $A_3(5; 5; 2)$.
6. $S(3; 0; 3)$, α: $5x - 7y + 4z + 9 = 0$, $A_1(5; 6; 2)$, $A_2(1; 3; 4)$, $A_3(3; 4; 3)$.
7. $S(2; 7; 1)$, α: $2x + 6y - 4z + 11 = 0$, $A_1(4; 0; 3)$, $A_2(3; 1; 5)$, $A_3(2; 5; 2)$.
8. $S(3; 4; 4)$, α: $2x + 2y + 2z + 15 = 0$, $A_1(5; 1; 2)$, $A_2(4; 6; 0)$, $A_3(3; 1; 3)$.
9. $S(2; -1; 1)$, α: $4x - 8y + 3z + 12 = 0$, $A_1(2; 3; 3)$, $A_2(2; 4; 5)$, $A_3(2; 3; 4)$.
10. $S(1; 1; 1)$, α: $3x - 4y - 6z + 19 = 0$, $A_1(4; 2; 2)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 2)$.

№ 6. Выяснить взаимное расположение прямой l и плоскости α. Если они пересекаются, найти точку их пересечения и угол между ними. Если l и α параллельны, найти расстояние между ними.

1. а) $l: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-7}{4}, \alpha: 3x + 2y - 4z + 3 = 0;$

   б) $l: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{7}, \alpha: 4x - 9y - z + 8 = 0.$
2. а) $l: \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z}{-2}, \alpha: 6x + 4y + 5z + 5 = 0.$

   б) $l: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-7}{-4} = \dfrac{z-2}{0}, \alpha: 4x - 5y + 3z = 0;$
3. а) $l: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-6}{5} = \dfrac{z-9}{0}, \alpha: 10x - 4y + 3z + 7 = 0;$

   б) $l: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-5}{8} = \dfrac{z-1}{1}, \alpha: 3x + 2y + 7z - 4 = 0.$
4. а) $l: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+6}{-5} = \dfrac{z-2}{4}, \alpha: 4x + 6z + 3 = 0;$

б) $l: \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-8}{-6}, \alpha: 2x+z+3=0.$

5. а) $l: \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+6}{1}=\dfrac{z+3}{-2}, \alpha: -2x+2y-3z-3=0;$

   б) $l: \dfrac{x-2}{9}=\dfrac{y-7}{0}=\dfrac{z}{8}, \alpha: -3x+2y+2z+6=0.$

6. а) $l: \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-5}{7}=\dfrac{z-4}{7}, \alpha: 4x-y-4z+5=0;$

   б) $l: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-2}{-5}, \alpha: x+z-4=0.$

7. а) $l: \dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-4}{7}, \alpha: 2x+5y+z+5=0;$

   б) $l: \dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-6}{-3}, \alpha: 3x+9y-7z+2=0.$

8. а) $l: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{5}, \alpha: -4x+7y+2z-5=0;$

   б) $l: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-5}{8}, \alpha: x+6y-8z+3=0.$

9. а) $l: \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-2}{-1}, \alpha: 3x+y-4=0;$

   б) $l: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-4}, \alpha: 4x+4y+3z+6=0.$

10. а) $l: \dfrac{x-7}{-3}=\dfrac{y+9}{5}=\dfrac{z-1}{3}, \alpha: 4x-7y+2z=0;$

    б) $l: \dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+6}{-4}, \alpha: 3x+5y+3z-7=0.$

№ 7. Даны плоскости α_1 и α_2. Первая проходит через точки A, B и C. Вторая проходит через точку M_0 и имеет вектор нормали $\vec{N}$. Выяснить взаимное расположение плоскостей. Если они пересекаются, найти прямую их пересечения и угол между ними.

1. а) $A(3; –2; 4)$, $B(6; 1; 1)$, $C(0; 5; –9)$, $M_0(1; 0; 4)$, $\vec{N}=\{3; 2; 6\}$;

   б) $A(1; 9; 5)$, $B(6; 7; 9)$, $C(5; 3; 6)$, $M_0(1; 3; 4)$, $\vec{N}=\{-2; -1; 2\}$.

2. а) $A(3; 6; –2)$, $B(5; 7; 4)$, $C(3; 3; 6)$, $M_0(3; 5; –2)$, $\vec{N}=\{13; -8; -3\}$;

   б) $A(–5; 4; 1)$, $B(0; 8; 3)$, $C(–2; 3; 2)$, $M_0(3; –7; 2)$, $\vec{N}=\{5; 4; -4\}$.

3. а) $A(9; 2; –3)$, $B(6; 3; 2)$, $C(8; 0; 1)$, $M_0(7; 4; –1)$, $\vec{N}=\{-2; -1; -1\}$;

   б) $A(–2; 4; 7)$, $B(3; 8; 6)$, $C(1; 4; 3)$, $M_0(3; –2; 2)$, $\vec{N}=\{4; -1; 2\}$.

4. а) $A(3; 7; 6)$, $B(2; 3; –1)$, $C(6; 4; 6)$, $M_0(2; 9; –1)$, $\vec{N} = \{7; 7; -5\}$;
б) $A(3; –5; –5)$, $B(6; –2; 0)$, $C(9; 0; 1)$, $M_0(4; 5; –2)$, $\vec{N} = \{4; 0; -3\}$.
5. а) $A(8; 1; 4)$, $B(9; 5; 3)$, $C(5; 7; –2)$, $M_0(2; –5; 1)$, $\vec{N} = \{-6; 3; 6\}$;
б) $A(–2; 0; –5)$, $B(3; 7; 1)$, $C(–5; 6; 3)$, $M_0(5; –3; 8)$, $\vec{N} = \{4; 9; 1\}$.
6. а) $A(4; –6; 3)$, $B(2; 1; 4)$, $C(5; 7; 3)$, $M_0(–3; 2; 7)$, $\vec{N} = \{5; -2; 2\}$;
б) $A(0; 1; 5)$, $B(–6; 4; 7)$, $C(–8; 2; 5)$, $M_0(3; 4; 8)$, $\vec{N} = \{1; 8; -9\}$.
7. а) $A(3; 5; –2)$, $B(2; 9; 0)$, $C(6; 4; 3)$, $M_0(–4; 1; 5)$, $\vec{N} = \{4; 2; -2\}$;
б) $A(–8; 0; 2)$, $B(–4; 3; 5)$, $C(–2; 5; 6)$, $M_0(7; 8; –3)$, $\vec{N} = \{-1; 2; 3\}$.
8. а) $A(–3; 4; 8)$, $B(–9; 1; 1)$, $C(–7; 2; 5)$, $M_0(1; 6; –2)$, $\vec{N} = \{-1; 2; 0\}$;
б) $A(5; 0; 2)$, $B(3; 1; 7)$, $C(6; –3; 5)$, $M_0(3; –6; 2)$, $\vec{N} = \{2; 0; 3\}$.
9. а) $A(3; 4; –8)$, $B(2; 0; –2)$, $C(1; 7; 0)$, $M_0(2; 5; 4)$, $\vec{N} = \{5; 1; 2\}$;
б) $A(6; 9; 4)$, $B(8; 5; 4)$, $C(3; 7; 3)$, $M_0(–2; –2; 7)$, $\vec{N} = \{-2; -1; 8\}$.
10. а) $A(1; 3; 2)$, $B(–2; 6; 5)$, $C(4; 3; 1)$, $M_0(4; 9; –4)$, $\vec{N} = \{1; -2; 3\}$;
б) $A(8; 4; 2)$, $B(7; 5; 1)$, $C(4; 8; 6)$, $M_0(2; –3; 4)$, $\vec{N} = \{1; 3; 1\}$.

№ 8. Найти расстояние от прямой AB до прямой CD.

1. $A(–2; 6; 7)$, $B(6; 5; 3)$, $C(1; 0; 2)$, $D(3; 2; 3)$.
2. $A(3; –5; 1)$, $B(2; 4; 7)$, $C(8; 3; 2)$, $D(9; 4; 7)$.
3. $A(8; 3; 6)$, $B(4; 5; –1)$, $C(3; 7; 7)$, $D(5; 8; 4)$.
4. $A(5; 2; –3)$, $B(4; 1; 2)$, $C(6; –4; 3)$, $D(7; 1; 4)$.
5. $A(–1; 3; –1)$, $B(4; 5; 5)$, $C(7; 2; –6)$, $D(9; 8; –8)$.
6. $A(6; 2; 2)$, $B(4; –1; 0)$, $C(5; 4; 8)$, $D(9; 1; 2)$.
7. $A(4; 7; –4)$, $B(3; 4; 2)$, $C(1; 9; 3)$, $D(–5; 7; 6)$.
8. $A(–3; –3; 5)$, $B(–8; 4; 5)$, $C(7; 4; 5)$, $D(3; 1; 6)$.
9. $A(6; 4; 2)$, $B(3; 8; 4)$, $C(2; 0; 4)$, $D(6; 3; 2)$.
10. $A(9; 1; 5)$, $B(6; 5; 7)$, $C(0; 7; 5)$, $D(6; 0; 5)$.

№ 9. Изобразить поверхность второго порядка, заданную уравнением.

1. а) $9x^2 – 4y^2 + 9z^2 – 36x – 8y – 36z + 32 = 0$;
б) $–28x^2 + 225y^2 + 28z^2 + 192xz + 1000x + 450y – 475 = 0$.
2. а) $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 + 32x – 144y – 90z + 397 = 0$;
б) $18x^2 + 75y^2 + 32z^2 + 48xz – 300x + 300y + 100z – 250 = 0$.
3. а) $2x^2 – y^2 + 4x + 4y – 24z + 22 = 0$;
б) $676x^2 – 119y^2 + 119z^2 + 240yz – 4056x – 572y – 494z + 5915 = 0$.
4. а) $x^2 + 3z^2 – 4x – 6y + 6z – 5 = 0$;
б) $468x^2 + 657y^2 + 400z^2 + 648xy – 360x – 1980y – 800z – 1400 = 0$.
5. а) $x^2 + 12x + 2y + 28 = 0$;
б) $18x^2 + 5y^2 + 5z^2 – 26yz + 72x + 84y + 12z – 108 = 0$.

6. а) $4y^2 - z^2 - 16x - 16y - 8z + 16 = 0$;
   б) $-551x^2 + 44y^2 + 169z^2 + 600xy + 3614x - 1872y + 676z - 5239 = 0$.
7. а) $25x^2 + 9z^2 - 200x + 36z + 211 = 0$;
   б) $81x^2 - 800y^2 + 81z^2 - 738xz - 1548x - 4800y + 3852z - 1404 = 0$.
8. а) $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 36x - 360y - 24z - 792 = 0$;
   б) $676x^2 + 75y^2 + 432z^2 + 360yz - 2704x + 4134y - 624z - 4901 = 0$.
9. а) $9x^2 - 4y^2 + 54x - 8y + 113 = 0$;
   б) $48x^2 + 27y^2 + 125z^2 - 72xy - 930x - 240y + 250z - 925 = 0$.
10. а) $16x^2 + 9y^2 - 36z^2 + 64x - 18y - 72z + 181 = 0$;
    б) $26x^2 + 26y^2 + 9z^2 + 20xy + 392x + 328y + 36z + 1724 = 0$.

№ 10. Построить область, ограниченную заданными поверхностями.

1. $\frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{z^2}{4}, z = 2, z = 3, y = x, y = 2x \ (y > 0)$.
2. $y^2 + z^2 = 6x, y^2 + z^2 = (x - 3)^2, x = 1$.
3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, y^2 = 8x, z = 0, z = 5$.
4. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 2z, x = 5, y = 0, z = 1 \ (y \geq 0, z \geq 1)$.
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1, x = 1, x = 2, y = 1, z = 0 \ (y \geq 0, z \geq 0)$.
6. $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = -1, x^2 + z^2 = 4, y = 5$.
7. $x^2 + y^2 = 9, z = 0, z = y \ (z \geq 0)$.
8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1, z = 2y, z = 3y \ (y \geq 0)$.
9. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, 2(x - 1) = \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}, x = 0$.
10. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2}{9}, \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{9}, x = 6 \ (x > 0)$.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

4. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКА

В доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый колос дает 7 растений, на каждом растении вырастает 7 мер зерна. Сколько всех вместе?

Папирус Ахмеса

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Множества и их классификация.
2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
3. Бинарные отношения, их задание с помощью матриц. Композиция бинарных отношений, дизъюнктное произведение матриц.
4. Отношения порядка и эквивалентности. Классы эквивалентности.
5. Отображения. Классификация отображений.
6. Упорядоченные списки. Сортировка выбором, пузырьком, вставками.
7. Алгоритм быстрой сортировки (Хоара).
8. Принципы суммы и произведения.
9. Перестановки без повторений и с повторениями. Факториал.
10. Размещения без повторений и с повторениями. Число подмножеств конечного множества.
11. Сочетания без повторений и с повторениями. Число сочетаний.
12. Бином Ньютона и треугольник Паскаля.
13. Покрытие множества. Формула включений и исключений.
14. Упорядоченные разбиения множества и полиномиальные коэффициенты.
15. Неупорядоченные разбиения множества. Числа Стирлинга 2-го рода и числа Белла.

Профильный уровень

1. Мультимножества. Объединение и пересечение мультимножеств.
2. Декартово произведение множеств и представление информации в реляционных базах данных в первой нормальной форме (1NF). Понятие о второй нормальной форме (2NF).

3. Мощность (кардинальное число) бесконечного множества. Понятие о мощностях $\aleph_0$, $\aleph_1$ и континуум-гипотезе.
4. Матроиды. Максимальные независимые подмножества.
5. Задача о подмножестве максимального веса. Жадные алгоритмы.
6. Сортировка слиянием.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны три непустых множества A, B, C. Можно ли однозначно ответить на вопрос: в каком множестве содержится больше элементов – $(A\cup B)\cap C$ или $A\cup(B\cap C)$? Почему?
2. Пусть $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{z: |z| \le 1\}$. Изобразить в пространстве координат (x, y, z) декартово произведение $A\times B$. Что изменится, если в определениях обоих множеств поменять знаки неравенства на знаки равенства?
3. Даны множества $A = \{$красный, синий$\}$ и $T = \{$автомобиль, велосипед$\}$. Построить булеан множества $A\times T$. Сколько элементов он содержит и почему?
4. Будем говорить, что две прямые находятся в бинарном отношении ρ, если лежат в одной плоскости. Является ли ρ отношением эквивалентности? Почему?
5. В каких случаях число k-элементных упорядоченных выборок с повторениями из n-элементного множества равно числу k-элементных упорядоченных выборок без повторений? Может ли число упорядоченных выборок без повторений оказаться большим, нежели выборок с повторениями?
6. Чему равна сумма всех чисел в строках треугольника Паскаля с 0-й по n-ю включительно?
7. Известно, что $|A| = 5$, $|B| = 8$, $|C| = 6$. Оценить (с обеих сторон) величину $|A\cup B\cup C|$.
8. Вывести формулу для: а) числа Стирлинга $S(n, n–1)$; б) числа Стирлинга $S(n, 2)$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Доказать тождество. Изобразить результат на диаграмме Эйлера-Венна.

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
2. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
4. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$.
5. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
6. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
8. $A \Delta (A \Delta B) = B$.

9. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$. 10. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

№ 2. Даны бинарные отношения ρ и σ. Найти их композицию $\tau = \rho * \sigma$ и выписать все упорядоченные пары, входящие в τ. Записать матрицу τ. Проверить свойства этого отношения: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

1. ρ = {(аз, «Калина»), (аз, «Приора»), (буки, «Приора»), (веди, «Калина»), (буки, «Гранта»), (веди, «Приора»)}; σ = {(«Калина», красный), («Гранта», красный), («Гранта», зеленый), («Приора», зеленый), («Приора», синий)}.
2. ρ = {(кирпич, Мегре), (бетон, Пуаро), (цемент, Мегре), (кирпич, Холмс), (цемент, Пуаро)}; σ = {(Мегре, аз), (Пуаро, буки), (Мегре, буки), (Холмс, аз), (Холмс, веди)}.
3. ρ = {(красный, «Калина»), (зеленый, «Калина»), (зеленый, «Приора»), (красный, «Гранта»), (зеленый, «Гранта»), (синий, «Гранта»)}; σ = {(«Калина», цемент), («Приора», бетон), («Калина», кирпич), («Гранта», бетон)}.
4. ρ = {(Холмс, аз), (Мегре, веди), (Пуаро, веди), (Пуаро, аз), (Холмс, буки)}; σ = {(буки, красный), (буки, зеленый), (аз, зеленый), (веди, красный), (аз ,синий)}.
5. ρ = {(аз, «Калина»), (буки, «Гранта»), (буки, «Калина»), (аз, «Гранта»), (веди, «Приора»)}; σ = {(«Калина», Мегре), («Приора», Пуаро), («Калина», Холмс), («Гранта», Пуаро), («Калина», Пуаро), («Гранта», Холмс)}.
6. ρ = {(Мегре, цемент), (Пуаро, кирпич), (Холмс, бетон), (Холмс, цемент), (Пуаро, бетон)}; σ = {(бетон, «Калина»), (цемент, «Приора»), (бетон, «Приора»), (цемент, «Гранта»), (кирпич, «Калина»)}.
7. ρ = {(бетон, аз), (кирпич, веди), (бетон, буки), (цемент, буки), (кирпич, аз), (цемент, веди)}; σ = {(буки, синий), (веди, красный), (аз, зеленый), (буки, красный), (веди, зеленый)}.
8. ρ = {(красный, Пуаро), (синий, Холмс), (зеленый, Мегре), (синий, Пуаро), (зеленый, Пуаро), (синий, Мегре)}; σ = {(Мегре, буки), (Холмс, аз), (Пуаро, веди), (Холмс, буки)}.
9. ρ = {(Мегре, «Приора»), (Холмс, «Калина»), (Мегре, «Гранта»), (Пуаро, «Калина»), (Холмс, «Гранта»)}; σ = {(«Калина», красный), («Приора», красный), («Приора», зеленый), («Гранта», красный), («Калина», синий)}.
10. ρ = {(аз, «Калина»), (аз, «Гранта»), (буки, «Приора»), (веди, «Калина»), (аз, «Приора»), (буки, «Гранта»)};

σ = {(«Калина», цемент), («Приора», бетон), («Калина», кирпич), («Приора», кирпич), («Гранта», бетон)}.

№ 3. Соответствие $f: X \to Y$ задано уравнением. Выяснить, является ли оно отображением. В случае положительного ответа выяснить, будет ли оно сюръективным, инъективным, биективным.

1. $x^3 + 5y^3 = 1$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.
2. $y^2 = 2x$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.
3. $6|x| + |y| = 3$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.
4. $y^2 = -4x$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.
5. $x^2 - y^2 = 0$, $X = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$, $Y = \mathrm{R}$.
6. $\sqrt{x} + 3y = 0$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}^- \cup \{0\}$.
7. $3x^2 + 2y^3 = 5$, $X = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$, $Y = \mathrm{R}$.
8. $x = \mathrm{tg}\, y$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.
9. $5x = 2 \sin y$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.
10. $2x^2 - y^2 = 0$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}$.

№ 4. Отсортировать указанный массив A с помощью:

а) «пузырькового» алгоритма;

б) алгоритма «вставками»;

в) «быстрого» алгоритма.

Сравнить число шагов в алгоритмах на примере «своего» массива.

1. A = {82, 50, 38, 17, 12, 15, 3, 52, 54}.
2. A = {92, 18, 66, 92, 64, 38, 34, 38, 35}.
3. A = {84, 26, 43, 46, 35, 47, 42, 85, 3}.
4. A = {61, 75, 69, 12, 36, 83, 12, 50, 96}.
5. A = {70, 26, 26, 49, 76, 56, 2, 65, 52}.
6. A = {23, 27, 45, 38, 27, 15, 2, 10, 62}.
7. A = {89, 74, 73, 25, 2, 8, 41, 53, 88}.
8. A = {13, 98, 85, 18, 5, 87, 98, 86, 14}.
9. A = {9, 76, 19, 67, 59, 9, 91, 42, 77}.
10. A = {58, 18, 88, 80, 61, 16, 18, 74, 65}.

№ 5. Решить задачу.

1. *«Вода»*. У водорода 3 изотопа: протий (^{1}H), дейтерий (^{2}H) и тритий (^{3}H). У кислорода 3 изотопа: ^{16}O, ^{17}O и ^{18}O. Сколькими способами можно из атомов водорода и кислорода составить молекулу воды?
2. *«Пиковая дама»*. У Германна колода из 52 карт. Сколькими способами он может выбрать из них 3 так, что это окажутся тройка, семерка и пиковая дама (в указанном порядке)?
3. *«Улицы разбитых фонарей»*. Вдоль улицы стоят 9 фонарей. Будем говорить, что на улице страшно, если хотя бы 2 фонаря подряд не горят. Хулиганы хотят разбить 3 фонаря так, чтобы на улице стало страшно. Сколькими способами они могут это сделать?
4. *«Игра в слова»*. Найти число слов длины 5, составленных из букв латинского алфавита так, что две соседние буквы всегда различны.

5. *«Тройка, семерка, туз»*. В колоде 52 карты. Сколькими способами Германн может вытянуть 3 из них так, чтобы это оказались тройка, семерка, туз (в любом порядке)?
6. *«Квант»*. Согласно принципу Паули, движение электронов в атоме характеризуется 4 квантовыми числами, причем каждому электрону отвечает уникальный набор чисел. Это главное число n (целое), орбитальное число l, магнитное число m_l и спин s. Известно, что l – целое число из диапазона от 0 до n–1, m_l – целое от $–l$ до l, s может равняться ½ или –½. Сколько элементов войдет в таблицу Менделеева, если n принимает значения от 1 до 7?
7. *«Флажки»*. В коробке 6 белых, 7 синих и 5 красных лент. Сколько разных флагов можно составить из 3 лент данного набора, сшивая их сверху вниз?
8. *«Бюрократия»*. Из числа своих 10 подчиненных министр должен назначить 2 первых заместителей, 3 заместителей и 1 секретаря. Сколькими способами он может это сделать?
9. *«Многоугольник»*. В выпуклом 8-угольнике проводят все возможные диагонали. Найти количество точек их попарного пересечения *не в вершинах* многоугольника. Считается, что никакие 2 диагонали не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке.
10. *«Квартет»*. Проказница-Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка задумали сыграть квартет и достали бас, альт и две скрипки. Сколько имеется вариантов распределения музыкальных инструментов между исполнителями, если Осел отказывается играть на альте?

№ 6. Сколькими способами можно переставить буквы в ваших
- фамилии,
- имени,
- отчестве

так, чтобы получились другие слова?

№ 7. Решить задачу.
1. В группе 15 человек. Сколькими способами можно разбить эту группу на две подгруппы при условии, что в каждой подгруппе должно оказаться не менее 5 человек?
2. Отделение из 8 солдат требуется выстроить в 2 шеренги так, чтобы в каждой шеренге они стояли по убыванию роста. Сколькими способами это можно сделать?
3. Вычислить 20000001^4, не используя калькулятор.
4. Сколько разных букетов из 7 цветов можно составить, если в цветочном киоске продаются астры, пионы, розы, гладиолусы и гвоздики?

5. Вычислить $(2x + 3y)^7$.
6. В академической группе 20 человек, из них 14 изучают английский язык, 6 – немецкий. Сколькими способами можно разбить эту группу на три подгруппы по изучению иностранного языка, если количество «англичан» в подгруппах должно быть одинаковым?
7. Вычислить $(x - 2y + z)^4$.
8. В меню 8 блюд, на подносе умещаются 4 тарелки. Сколькими разными способами можно заполнить поднос, поставив на него хотя бы одну тарелку?
9. Определить, сколько рациональных слагаемых содержится в выражении $(2^{1/3} + 5^{1/2})^{30}$.
10. В колоде 36 карт, из них выбирается 6. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы выбранными оказались не менее 2 тузов?

№ 8. В отделе Кристобаля Хозевича Хунты работают X человек, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык. Известно, что E человек знают английский, D – немецкий, F – французский, P – английский и немецкий, Q – английский и французский, R – немецкий и французский. Выяснить:

а) сколько человек знают все три языка;
б) сколько человек знают ровно два языка;
в) сколько человек знают ровно 1 язык.

Проиллюстрировать решение диаграммой Эйлера – Венна.

1. $X = 24, E = 10, D = 12, F = 18, P = 3, Q = 7, R = 8$;
2. $X = 26, E = 14, D = 16, F = 16, P = 6, Q = 7, R = 9$;
3. $X = 18, E = 13, D = 9, F = 7, P = 5, Q = 3, R = 4$;
4. $X = 17, E = 13, D = 8, F = 8, P = 6, Q = 5, R = 3$;
5. $X = 21, E = 14, D = 12, F = 11, P = 7, Q = 7, R = 6$;
6. $X = 23, E = 15, D = 12, F = 10, P = 6, Q = 7, R = 4$;
7. $X = 24, E = 12, D = 12, F = 15, P = 4, Q = 6, R = 7$;
8. $X = 24, E = 11, D = 14, F = 13, P = 3, Q = 5, R = 7$;
9. $X = 23, E = 12, D = 13, F = 6, P = 4, Q = 3, R = 3$;
10. $X = 28, E = 15, D = 13, F = 11, P = 5, Q = 4, R = 3$.

№ 9. Найти все неупорядоченные разбиения множества A на k подмножеств. Проверить, что их количество равно соответствующему числу Стирлинга второго рода.

1. A = {чай, кофе, какао, «Fanta», «Coca-Cola»}, $k = 3$.
2. A = {чашка, ложка, тарелка, чайник, кастрюля, сковородка, поднос, блюдце}, $k = 7$.
3. A = {Москва, Петербург, Самара, Казань, Волгоград, Саратов}, $k = 2$.

4. A = {стул, кресло, стол, диван, шкаф}, $k = 3$.
5. A = {снег, дождь, град, туман, иней, вьюга}, $k = 2$.
6. A = {Толстой, Достоевский, Чехов, Пушкин, Гоголь, Тургенев, Грибоедов, Лермонтов}, $k = 7$.
7. A = {очки, бинокль, телескоп, лупа, подзорная труба}, $k = 3$.
8. A = {картофель, капуста, морковь, горох, петрушка, свекла}, $k = 2$.
9. A = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун}, $k = 7$.
10. A = {ямб, хорей, амфибрахий, анапест, дактиль}, $k = 3$.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Число элементов массива (множества) n задается пользователем. Способ ввода иной информации (в том числе программная генерация массива псевдослучайных чисел) непринципиален.

№ 1. Запрограммировать сортировку массива длины n:
- а) с помощью пузырькового алгоритма;
- б) с помощью алгоритма вставками;
- в) используя быстрый алгоритм.

№ 2. Написать программу, генерирующую все перестановки множества $\{1, 2,\ldots, n\}$. Предусмотреть автоматический подсчет их количества и сравнение его с $n!$. Для генерации перестановок может быть использован рекурсивный алгоритм.

№ 3. Запрограммировать бинарный поиск в отсортированном массиве.

5. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

– Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти?

– Это во многом зависит от того, куда ты хочешь прийти, – ответил Кот.

Л. Кэрролл, «Алиса в Стране чудес»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Графы. Смежность и инцидентность. Степени вершин.

2. Способы представления графа.
3. Маршруты в графах. Достижимость и связность. Точки сочленения (шарниры) и мосты.
4. Расстояния в графах. Диаметр, радиус, центры графа.
5. Операции над графами.
6. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.
7. Циклы и деревья. Цикломатическое число графа. Остовные деревья.
8. Задача Кэли о построении минимального остовного дерева во взвешенном графе. Алгоритмы Прима и Крускала.
9. Эйлеровы циклы и графы.
10. Гамильтоновы циклы и графы. Задача коммивояжера.
11. Поиск в глубину. Модификация алгоритма для поиска компонент связности.
12. Поиск в ширину. Модификация алгоритма для поиска компонент связности.
13. Транспортные сети. Алгоритм Дейкстры.
14. Задача о максимальном потоке в сети. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе, алгоритм Форда – Фалкерсона.

Профильный уровень

1. Планарные графы. Теорема Понтрягина – Куратовского.
2. Эйлерова характеристика графов и выпуклых многогранников.
3. Конденсация (фактор-граф, граф Герца) ориентированного графа.
4. Двоичные (бинарные) деревья, их представление с помощью списочных структур, упакованных массивов, польской записи.
5. Алгоритмы обхода двоичных деревьев.
6. Алгоритм Флойда поиска кратчайшего пути между парами вершин.
7. Раскраска графа. Хроматическое число.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. В неориентированном графе n вершин и kn ребер. При каких k и n нельзя утверждать, что он содержит петли или кратные ребра?
2. Граф не имеет кратных дуг, а его матрица смежности содержит нечетное количество ненулевых элементов. Каким свойством обладает этот граф?
3. Доказать *лемму о рукопожатиях*: в неориентированном графе без петель число вершин с нечетными степенями четно.
4. Какое минимальное число дуг может содержать ориентированный сильно связный граф с n вершинами?

5. Существуют ли графы, у которых диаметр меньше удвоенного радиуса? Ответ обосновать.
6. Привести пример эйлерова графа с 6 вершинами и 14 ребрами. Может ли граф с 6 вершинами быть уникурсальным, если он имеет 11 ребер? 10 ребер? Ответ пояснить.
7. Вершины графа расположены в вершинах тетраэдра, а ребра совпадают с ребрами этого многогранника. Выяснить, существует ли в указанном графе гамильтонов цикл.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Два графа заданы своими матрицами смежности. Выяснить, изоморфны ли они. Изобразить оба графа.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$

3. $A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$

4. $A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&1 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$

5. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

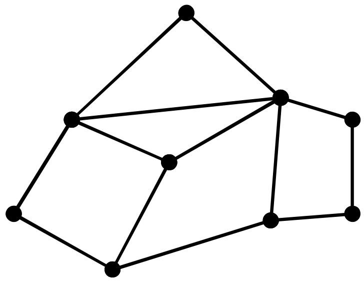
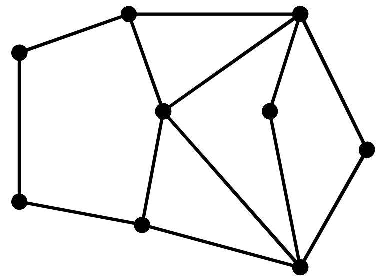
7. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

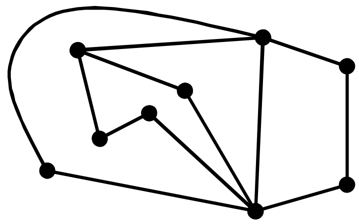
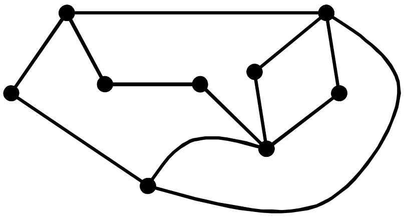
8. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

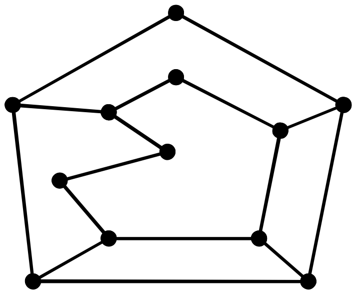
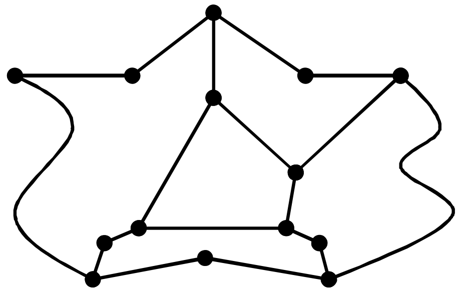
9. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

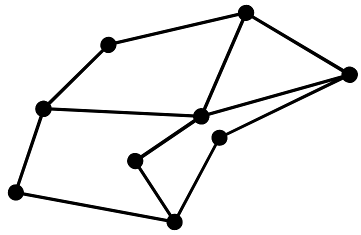
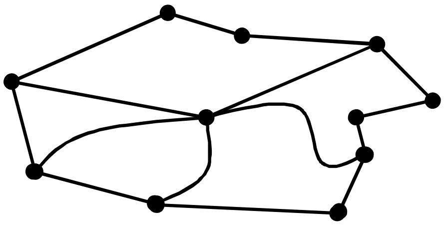
10. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

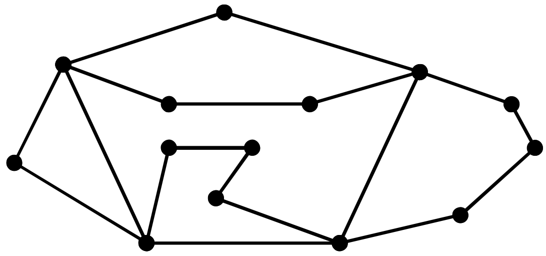
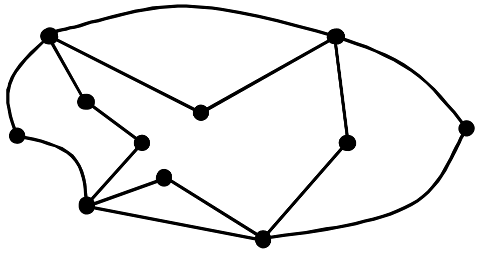
№ 2. Выяснить, являются ли два данных графа гомеоморфными.

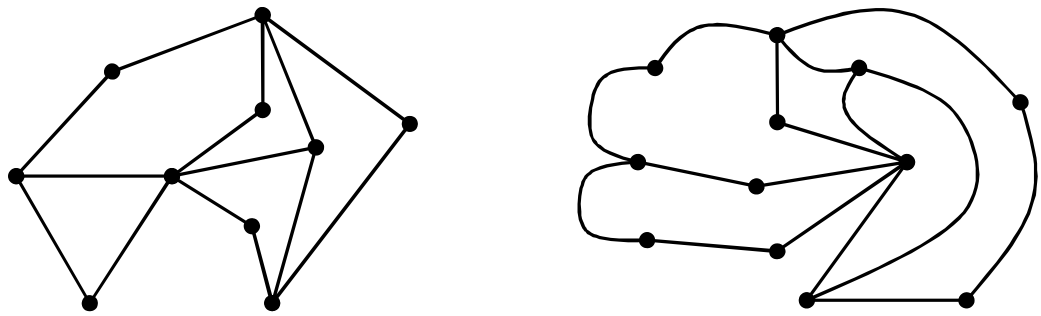
1.  

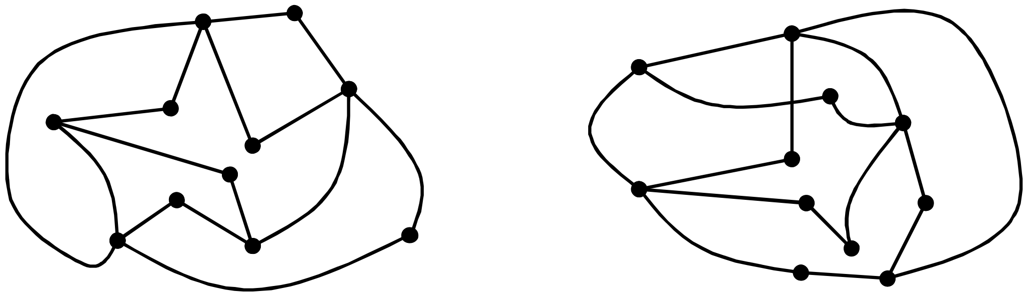
2.  

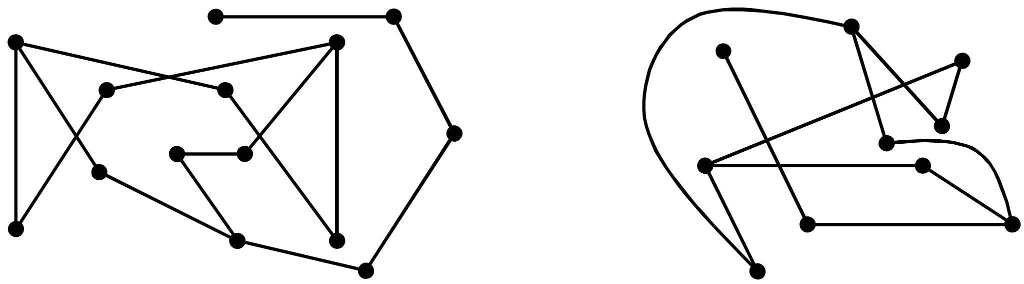
3.  

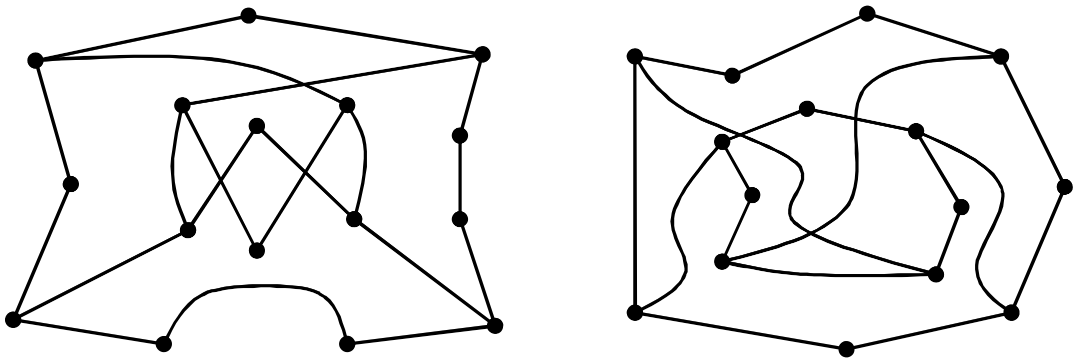
4.  

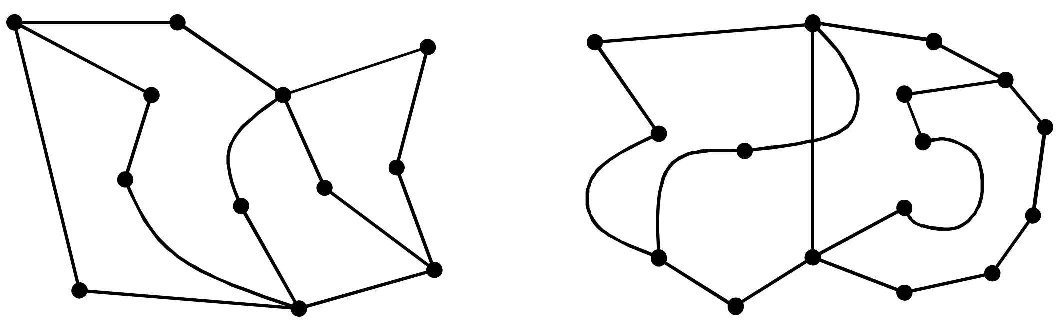
5.  

6. 

7. 

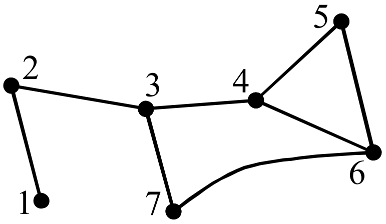
8. 

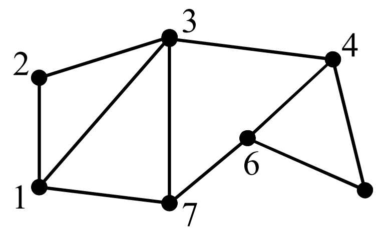
9. 

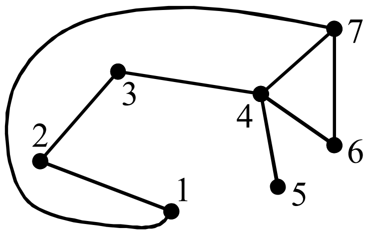
10. 

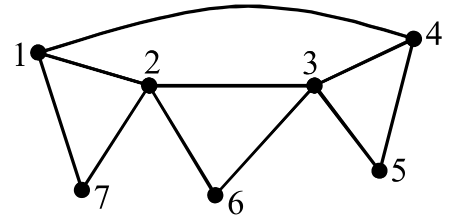
№ 3. В одном из двух графов (одного и того же варианта) задания № 2 найти эйлеров подграф с максимальным количеством ребер (если таких подграфов несколько, указать их все).

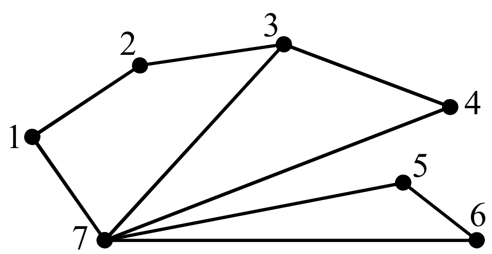
№ 4. Для заданного графа найти диаметр, центры, радиус, точки сочленения и мосты (если они есть). Введя необходимые дополнительные обозначения, записать его матрицу инцидентности.

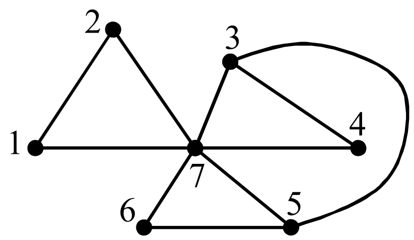
1. 

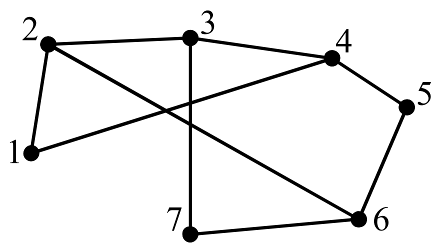
2. 

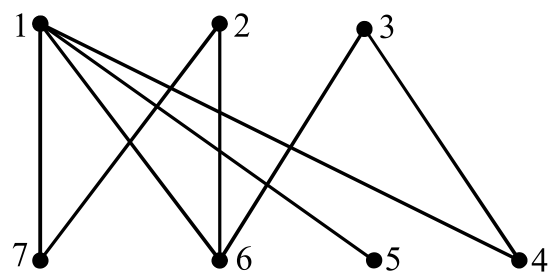
3. 

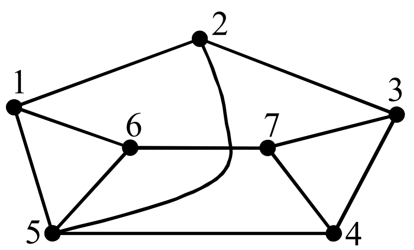
4. 

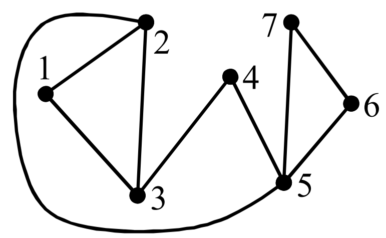
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

Выполнение заданий №№ 5–6 осуществляется именно в последовательности, указанной в тексте: сначала выполняется поиск (пути или компонент связности) и лишь затем изображается граф.

№ 5. Граф задан своей матрицей смежности.

а) найти путь из вершины 3 в вершину 10 методом поиска в глубину;
б) найти путь из вершины 1 в вершину 10 методом поиска в ширину;
в) изобразить граф и найденные пути от одной вершины к другой.

1. $$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

5. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 6. Граф задан списком смежности. Найти компоненты связности графа, обходя его вершины:

а) методом поиска в глубину;

б) методом поиска в ширину.

Изобразить данный граф.

1. 1:{2,6}, 2:{1,6}, 3:{9,10}, 4:{7}, 5:{8,9}, 6:{1,2}, 7:{4}, 8:{5,9,10}, 9:{3,5,8}, 10:{3,8}.

2. 1: {3,5,6}, 2: {4,7,10}, 3: {1,5,6,9}, 4: {2,8,10}, 5: {1,3,6}, 6: {1,3,5,9}, 7: {2,8}, 8: {4,7,10}, 9: {3,6}, 10: {2,4,8}.

3. 1: {5,9}, 2: {3,7}, 3: {2,7}, 4: {6,8}, 5: {1,9}, 6: {4,8,10}, 7: {2,3}, 8: {4,6,10}, 9: {1,5}, 10: {6,8}.

4. 1: {6,7,10}, 2: {3,5}, 3: {2,5}, 4: {6,9,10}, 5: {2,3}, 6: {1,4,7,9,10}, 7: {1,6}, 8: { }, 9: {4,6}, 10: {1,4,6}.

5. $1:\{2,4\}$, $2:\{1,4,7,10\}$, $3:\{5,6,8,9\}$, $4:\{1,2,7,10\}$ $5:\{3,6,8,9\}$, $6:\{3,5,8\}$, $7:\{2,4\}$, $8:\{3,5,6\}$, $9:\{3,5\}$, $10:\{2,4\}$.

6. $1:\{4,5\}$, $2:\{3,6\}$, $3:\{2,6\}$, $4:\{1,7\}$, $5:\{1,7,9,10\}$, $6:\{2,3\}$, $7:\{4,5,8\}$, $8:\{7,9\}$, $9:\{5,8,10\}$, $10:\{5,9\}$.

7. $1:\{7,8,10\}$, $2:\{4\}$, $3:\{5,9\}$, $4:\{2\}$, $5:\{3,9\}$, $6:\{7\}$, $7:\{1,6,10\}$, $8:\{1,10\}$, $9:\{3,5\}$, $10:\{1,7,8\}$.

8. $1:\{4,7,8,10\}$, $2:\{3,5,6\}$, $3:\{2\}$, $4:\{1,10\}$, $5:\{2\}$, $6:\{2\}$, $7:\{1,8\}$, $8:\{1,7\}$, $9:\{\ \}$, $10:\{1,4\}$.

9. $1:\{7\}$, $2:\{4,8,9\}$, $3:\{5,10\}$, $4:\{2,8,9\}$, $5:\{3,6,10\}$, $6:\{5,10\}$, $7:\{1\}$, $8:\{2,4,9\}$, $9:\{2,4,8\}$, $10:\{3,5,6\}$.

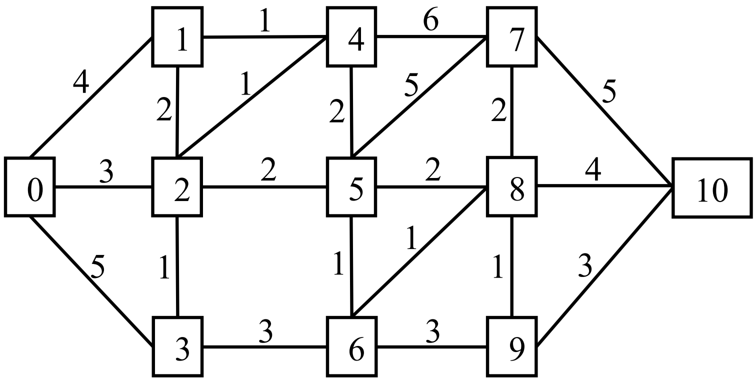
10. $1:\{9\}$, $2:\{7,10\}$, $3:\{7,8\}$, $4:\{5,9\}$, $5:\{4\}$, $6:\{7,8\}$, $7:\{2,6\}$, $8:\{3,6,10\}$, $9:\{1,4\}$, $10:\{2,8\}$.

№ 7. Найти минимальное остовное дерево взвешенного графа:

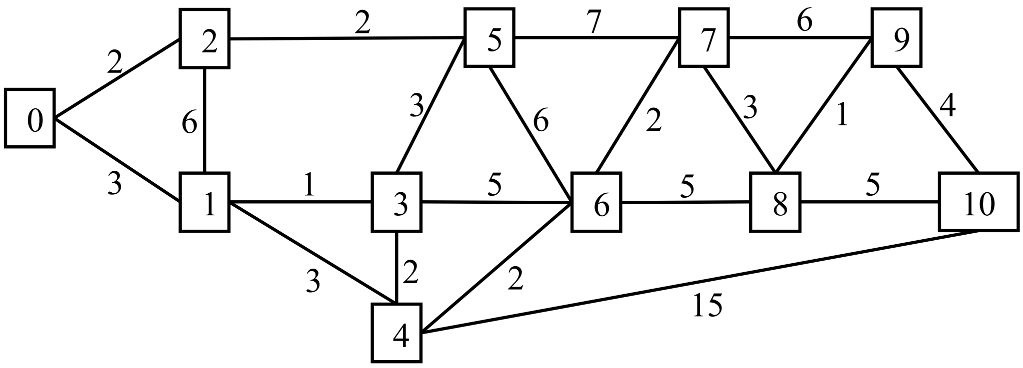
а) с помощью алгоритма Прима;

б) с помощью алгоритма Крускала.

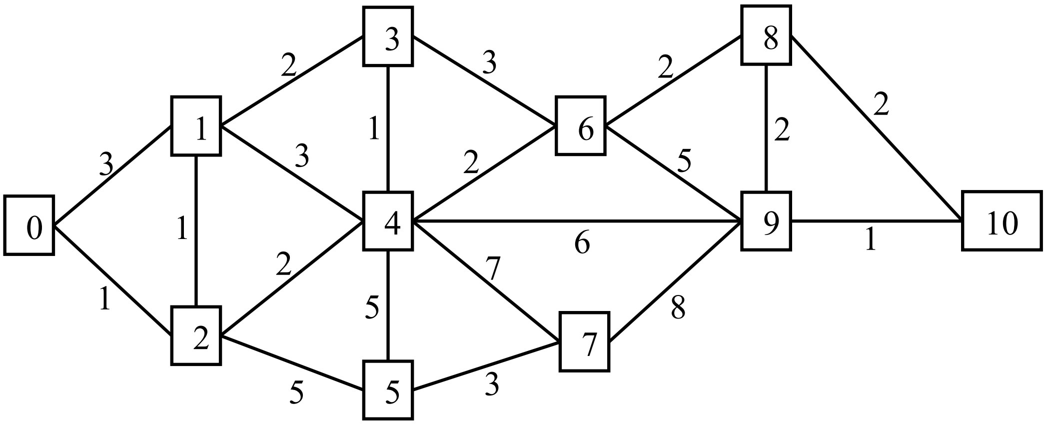
1.



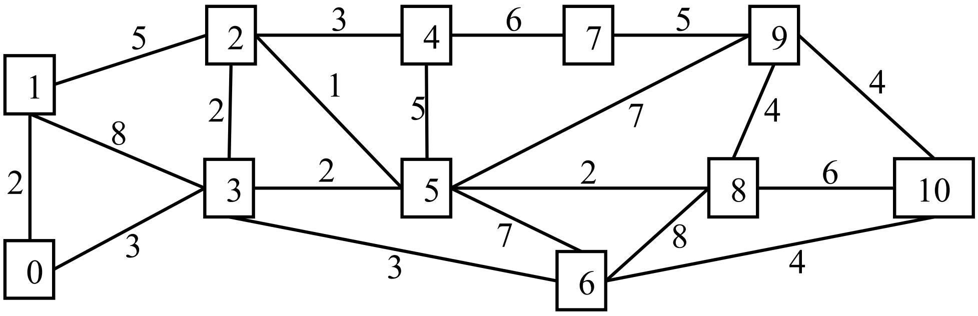
2.



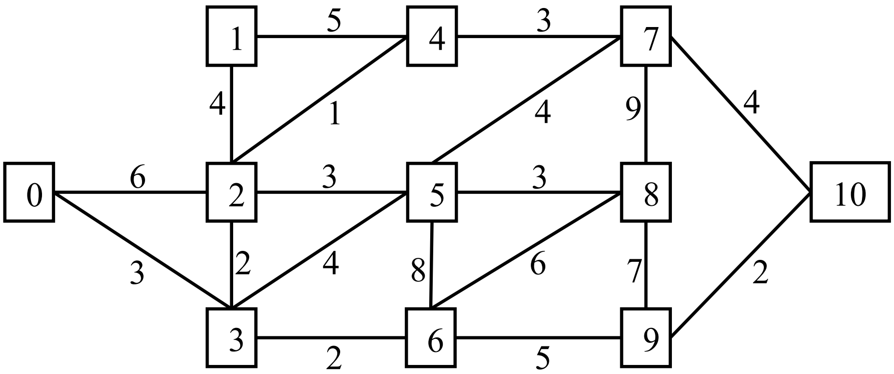
3.



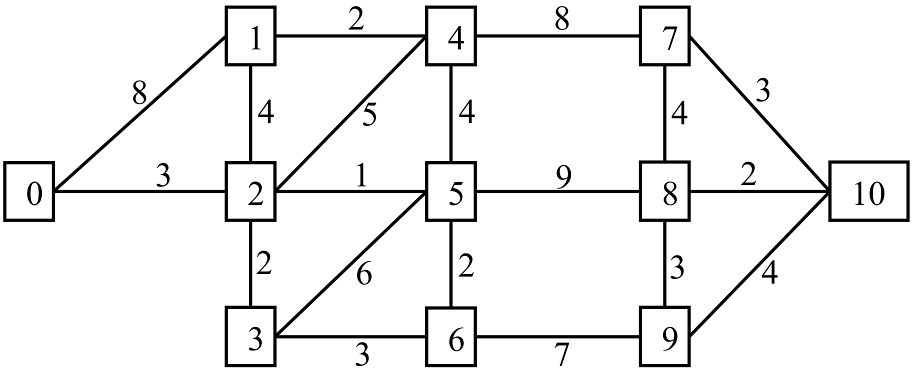
4.

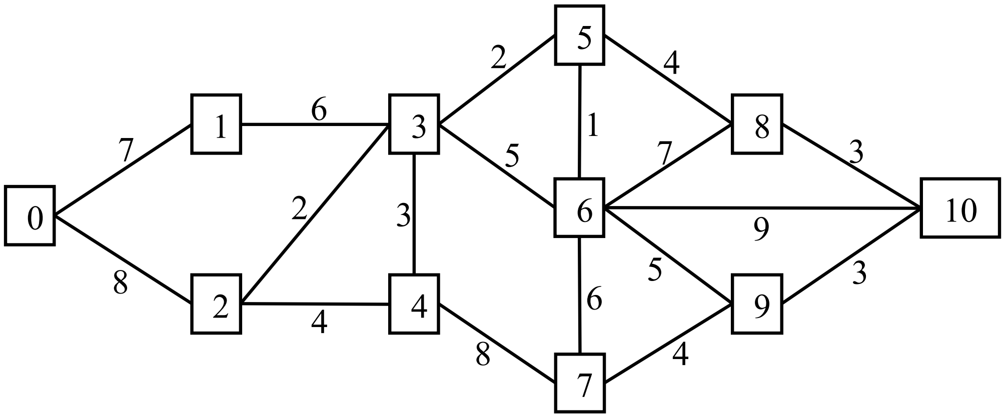


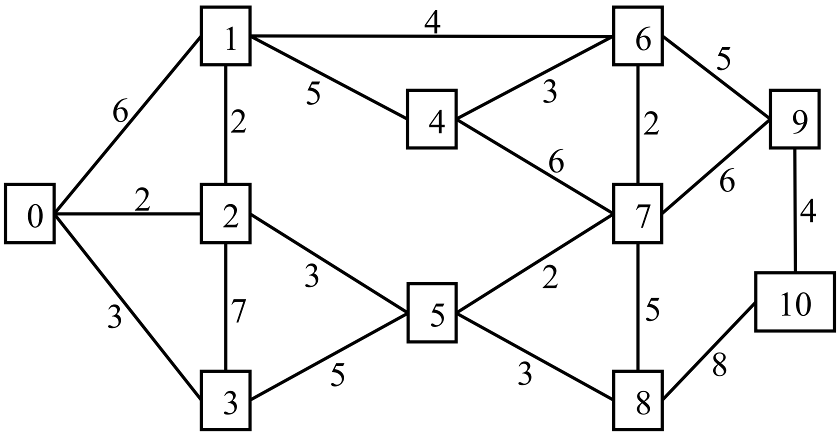
5.

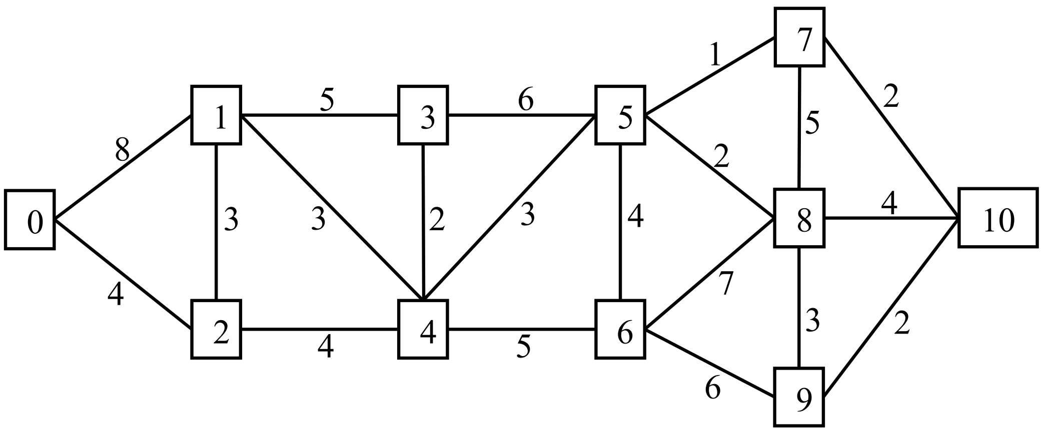


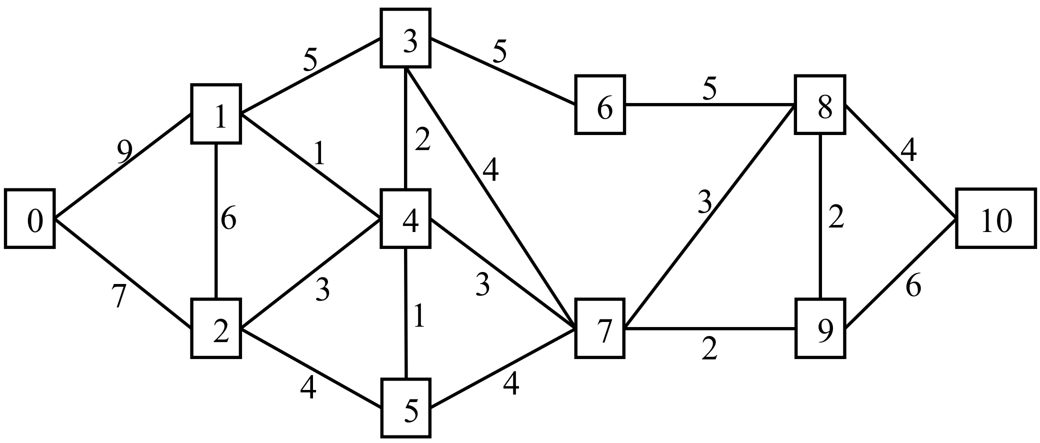
6.



7. 

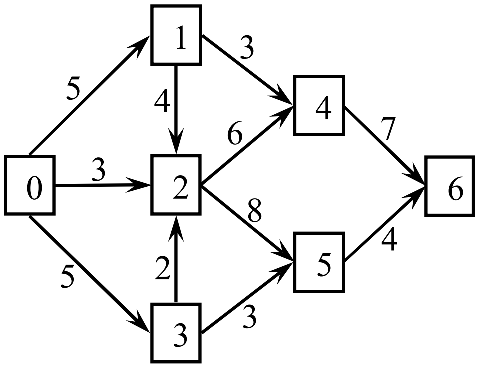
8. 

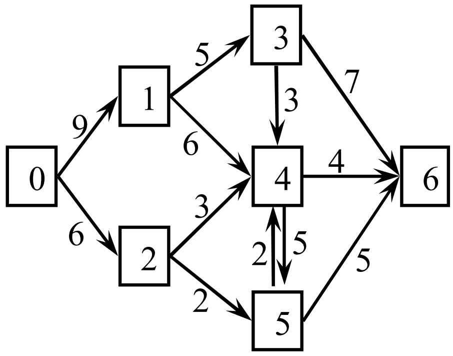
9. 

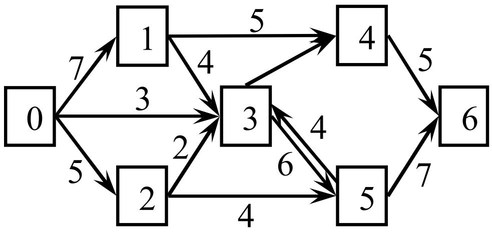
10. 

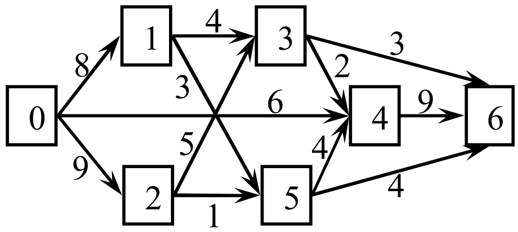
№ 8. Дана сеть. С помощью алгоритма Дейкстры найти путь с минимальным весом из вершины 0 в вершину 10. Исходные данные взять в задании № 7.

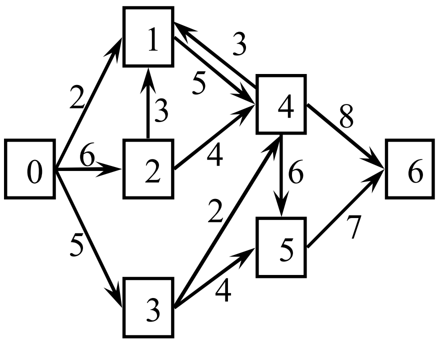
№ 9. Дана транспортная сеть с источником 0 и стоком 6, в которой указаны пропускные способности дуг. Найти максимальный поток в сети с помощью алгоритма Форда – Фалкерсона. Перечислить разрезы сети, найти их мощности и выбрать среди них минимальную. Сравнить эту мощность с максимальным потоком.

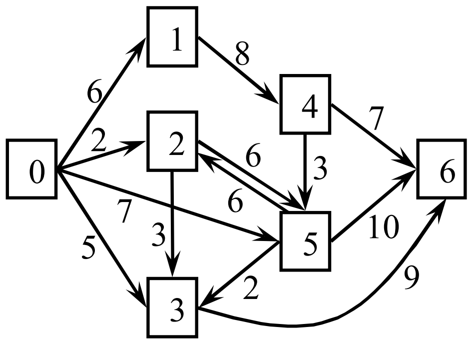
1. 

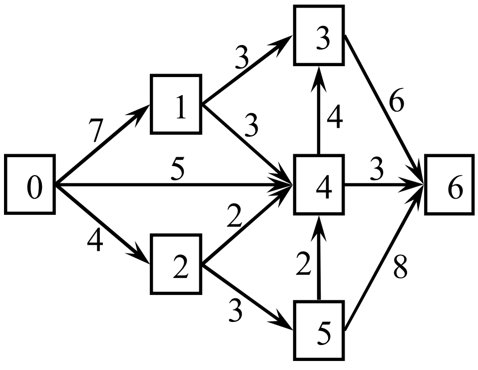
2. 

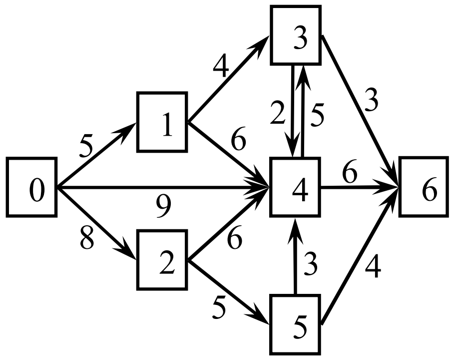
3. 

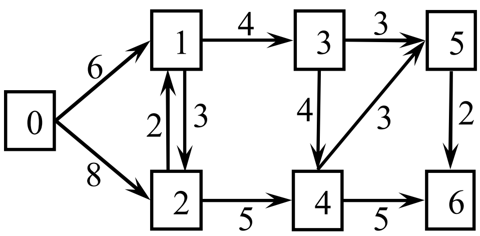
4. 

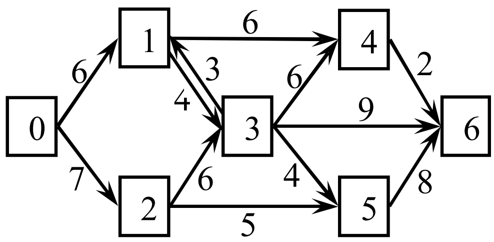
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Формы представления графа (матрица смежности или инцидентности, список смежности) определяются из соображений удобства реализации того или иного алгоритма.

№ 1. В заданном связном графе найти путь из вершины *A* в вершину *B*:

а) методом поиска в глубину;

б) методом поиска в ширину.

Вершины *A* и *B* задаются пользователем.

№ 2. Во взвешенном графе найти минимальное остовное дерево:

а) с помощью алгоритма Прима;

б) с помощью алгоритма Крускала.

№ 3. В заданной сети найти путь минимальной стоимости от источника до стока с помощью алгоритма Дейкстры.

№ 4. В заданном связном графе найти эйлеров цикл или установить, что его нет (для этого можно использовать алгоритм Флери).

№ 5. Отыскать максимальную пропускную способность заданной транспортной сети.

6. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

> Математика – это наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями.
>
> *Ю. П. Вигнер*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Бинарные операции на множестве. Группоиды. Таблица Кэли.
2. Группы. Абелевы (коммутативные) группы. Подгруппы.
3. Группа перестановок.
4. Циклические группы.

5. Изоморфизм групп.
6. Множества с двумя введенными операциями. Кольца и поля.
7. Деление целых чисел с остатком. Сравнения по модулю, их свойства.
8. Кольца и поля вычетов по модулю.
9. Кольцо многочленов одной переменной.
10. Деление и НОД многочленов. Алгоритм Евклида вычисления НОД натуральных чисел и многочленов.
11. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера.
12. Приводимость многочлена над полем. Основная теорема алгебры.

Профильный уровень

1. Понятие об n-арных операциях. Алгебра, ее основное (несущее) множество и сигнатура.
2. Представление алгебраических выражений с помощью деревьев. Польская и обратная польская записи.
3. Алгебра Кантора (алгебра множеств с операциями объединения, пересечения и дополнения).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Множество состоит из поворотов плоскости вокруг начала координат на углы 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ и зеркальных симметрий относительно координатных осей. На его элементах введена операция композиции. Записать для нее таблицу Кэли. Доказать, что указанная структура представляет собой группу. Является ли она циклической?
2. Является ли множество симметричных матриц второго порядка с введенными операциями сложения и умножения кольцом? Полем? Ответ обосновать.
3. Бинарные операции + и ×, заданные на множестве $G = \{a, b, c\}$, представлены таблицами Кэли. Доказать, что $(G, +, \times)$ – поле.

+	***a***	***b***	***c***
a	*c*	*a*	*b*
b	*a*	*b*	*c*
c	*b*	*c*	*a*

×	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*b*	*b*
c	*c*	*b*	*a*

4. Доказать, что множество матриц вида
$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$
где x, y – действительные числа, со введенными на нем операциями сложения и умножения изоморфно полю комплексных чисел.

5. Какие ограничения должны быть наложены на действительные параметры a и b, чтобы многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - a^2x^2 - a^3x - a^2b$ был неприводим над полем действительных чисел?
6. Коэффициенты многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ – целые числа. Доказать, что если несократимая дробь p/q (p, q – целые) является корнем $f(x)$, то p – делитель a_0, q – делитель a_n.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Перестановки σ_1, σ_2, σ_3 являются элементами группы S_6; групповой операцией служит * – композиция перестановок. Требуется:

а) на конкретном примере убедиться в ассоциативности операции *, т.е. проверить, что $\sigma_1*(\sigma_2*\sigma_3) = (\sigma_1*\sigma_2)*\sigma_3$;

б) найти $\sigma_2^{-1} * \sigma_1$.

Можно ли на основании сравнения $\sigma_2*\sigma_3$ и $\sigma_3*\sigma_2$ утверждать, что операция * коммутативна? некоммутативна?

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$

4. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

5. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

7. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 2. Операция * на множестве $G = \{a, b, c, d\}$ задана с помощью таблицы Кэли (первый операнд указывается в строке, второй – в столбце). Выяснить, является ли $(G, *)$ группой.

1.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*d*	*a*	*b*	*c*
c	*a*	*b*	*c*	*d*
d	*b*	*c*	*d*	*a*

2.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*b*	*a*	*c*	*d*
b	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*c*	*c*	*a*	*b*
d	*d*	*d*	*b*	*a*

3.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*d*	*b*	*c*	*a*
b	*b*	*d*	*a*	*b*
c	*c*	*a*	*b*	*c*
d	*a*	*b*	*c*	*d*

4.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*c*	*a*	*d*	*b*
b	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*c*	*b*	*a*
d	*b*	*d*	*a*	*c*

5.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*d*	*a*	*b*	*c*
b	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*b*	*c*	*d*	*a*
d	*c*	*d*	*a*	*b*

6.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*c*	*d*	*b*
c	*c*	*d*	*c*	*c*
d	*d*	*b*	*c*	*a*

7.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*b*	*c*	*d*	*a*
b	*c*	*d*	*c*	*b*
c	*d*	*c*	*a*	*c*
d	*a*	*b*	*c*	*d*

8.

+	***a***	***b***	***c***	***d***
a	*d*	*c*	*a*	*b*
b	*c*	*d*	*b*	*a*
c	*a*	*b*	*c*	*d*
d	*b*	*a*	*d*	*c*

9.

+	**a**	**b**	**c**	**d**
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*d*	*a*	*c*
c	*c*	*a*	*d*	*b*
d	*d*	*c*	*b*	*a*

10.

+	**a**	**b**	**c**	**d**
a	*b*	*c*	*a*	*d*
b	*c*	*d*	*b*	*b*
c	*a*	*b*	*c*	*d*
d	*d*	*b*	*d*	*c*

№ 3. Для двух заданных чисел a и b:

а) найти НОД с помощью алгоритма Евклида;

б) найти НОК.

1. $a = 5600$, $b = 2520$. 2. $a = 6300$, $b = 2376$. 3. $a = 3168$, $b = 3024$.
4. $a = 3168$, $b = 4368$. 5. $a = 4800$, $b = 4480$. 6. $a = 2205$, $b = 5280$.
7. $a = 2240$, $b = 6240$. 8. $a = 2200$, $b = 8736$. 9. $a = 7600$, $b = 3960$.
10. $a = 8624$, $b = 1360$.

№ 4. Выполнить арифметические действия в поле вычетов по модулю 7.

1. $4\times4\times3 - 2\times(6:5)$. 2. $5:4 - 5\times3 + 6^4$. 3. $6 + 3\times4 + 2^4:5$.
4. $2\times4 + 3\times(6:4) - 5$. 5. $4:5 - 6^4 + (7:3)\times2$. 6. $6^2 - 5\times5 + 2:4$.
7. $3\times5 + 4:6 - 6\times4$. 8. $3\times5 - 2\times6 + 1:5$. 9. $1:3 + 6\times5 - 3^5$.
10. $2:3 + 5\times4 - 3\times6$.

№ 5. Решить систему уравнений в поле вычетов по модулю 11.

1. $\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 9x + 8y = 10. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 6x + 2y = 5, \\ 9x + 10y = 9. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 7y = 9, \\ 9x + 2y = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x + 3y = 7, \\ 5x + 2y = 8. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 5x + 4y = 10, \\ 7x + 4y = 5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x + 8y = 4, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x + 2y = 6, \\ 8x + 9y = 6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 7x + 10y = 9, \\ 6x + 8y = 7. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 8x + 7y = 7, \\ 4x + 7y = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 9y = 5, \\ 4x + 2y = 9. \end{cases}$

№ 6. Задан многочлен $f(x)$. Требуется:

а) вычислить значение $f(x_0)$ с помощью схемы Горнера;

б) найти кратность x_1 как корня $f(x)$.

1. $f(x) = 4x^7 - 24x^6 + 45x^5 - 12x^4 - 50x^3 + 60x^2 - 40x + 16$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$.
2. $f(x) = 3x^7 - 24x^6 + 45x^5 + 26x^4 - 65x^3 + 41x^2 - 24x + 16$, $x_0 = -1$, $x_1 = 4$.
3. $f(x) = 5x^7 + 8x^6 - 3x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 3x + 3$, $x_0 = 2$, $x_1 = -1$.
4. $f(x) = 5x^7 + 60x^6 + 177x^5 - 30x^4 - 38x^3 + 195x^2 - 36x + 108$, $x_0 = 1$, $x_1 = -6$.
5. $f(x) = 4x^7 + 9x^6 - 12x^5 - 26x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 16x - 4$, $x_0 = -3$, $x_1 = -2$.
6. $f(x) = 3x^7 + 24x^6 + 63x^5 + 46x^4 - 39x^3 - 25x^2 + 39x - 63$, $x_0 = -5$, $x_1 = -3$.
7. $f(x) = 2x^7 - 20x^6 + 54x^5 - 41x^4 + 109x^3 - 14x^2 - 35x + 25$, $x_0 = 6$, $x_1 = 5$.
8. $f(x) = 8x^7 - 41x^6 + 45x^5 + 79x^4 - 185x^3 + 78x^2 + 68x - 72$, $x_0 = 4$, $x_1 = 2$.

9. $f(x) = 7x^7 - 17x^6 + 14x^5 - 12x^4 + 20x^3 - 20x^2 + 11x - 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.
10. $f(x) = 9x^7 + 137x^6 + 709x^5 + 1330x^4 + 477x^3 + 155x^2 - 475x + 250$, $x_0 = -3$, $x_1 = -5$.

№ 7. Найти НОД многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

1. $P(x) = 2x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 9x - 6$,
   $Q(x) = 3x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 3x + 10$.
2. $P(x) = 8x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 3x + 3$,
   $Q(x) = 2x^5 + x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 9x + 3$.
3. $P(x) = 6x^5 - x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 8x + 24$,
   $Q(x) = 15x^5 - 10x^4 + 48x^3 - 18x^2 + 40x - 12$.
4. $P(x) = 12x^5 + 20x^4 + 9x^3 - 29x^2 - 35x - 5$,
   $Q(x) = 18x^5 + 21x^4 + 15x^3 - 10x^2 - 26x - 4$.
5. $P(x) = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 25x - 10$,
   $Q(x) = 8x^5 - 10x^4 + 28x^3 - 42x^2 + 27x - 6$.
6. $P(x) = 6x^5 + 21x^4 + 27x^3 - 2x^2 - 35x - 28$,
   $Q(x) = 8x^5 + 20x^4 + 22x^3 + 11x^2 + 2x - 8$.
7. $P(x) = 5x^5 + 34x^4 + 64x^3 + 29x^2 - 18x - 24$,
   $Q(x) = 3x^5 + 18x^4 + 26x^3 + 16x^2 + 40x + 32$.
8. $P(x) = 6x^5 + 17x^4 - 48x^3 + 9x^2 + 18x - 2$,
   $Q(x) = 8x^5 + 36x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 28x - 3$.
9. $P(x) = 4x^5 + 24x^4 + 42x^3 + 6x^2 - 56x - 35$,
   $Q(x) = 12x^5 + 48x^4 + 36x^3 + 34x^2 + 55x + 25$.
10. $P(x) = 3x^5 + 22x^4 + 37x^3 - 2x^2 - 28x - 8$,
    $Q(x) = 12x^5 + 28x^4 + 14x^3 + 41x^2 + 67x + 18$.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

№ 1. Бинарная операция * на элементах конечного множества G задана таблицей Кэли. Определить, является ли $(G, *)$ группой. Элементы множества нумеруются числами от 1 до n. Таблица Кэли заносится в двумерный массив C; $c[i, j] = k$, если $i*j = k$.

№ 2. Написать программу, находящую НОД и НОК:
а) двух натуральных чисел;
б) произвольного количества $n > 2$ натуральных чисел.

№ 3. Запрограммировать арифметические действия над многочленами:
а) сложение и вычитание;
б) умножение;
в) деление с остатком.

Многочлен задается массивом коэффициентов A, элемент которого $a[k]$ равен коэффициенту при k-й степени независимой переменной.

7. ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

Какие шифры тебе не позволяют понять, что я имею в виду?

О. Медведев, «Не заходи за черту»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Кодирование. Виды кодирования (алфавитное, равномерное и т.д.).
2. Разделимые коды. Свойство префикса.
3. Алгоритм Маркова проверки однозначности декодирования.
4. Неравенство Крафта – Макмиллана.
5. Стоимость кода. Оптимальные коды и их свойства.
6. Метод Шеннона – Фано построения кода, близкого к оптимальному.
7. Метод Хаффмена построения оптимального префиксного кода.
8. Элементарные ошибки при передаче сообщений. Простейшие способы обнаружения и исправления ошибок.
9. Введение избыточности в схему кодирования для исправления ошибок. Кодовое расстояние.
10. Код Хемминга, исправляющий одну ошибку замещения.
11. Шифрование с закрытым и открытым ключом. Односторонние функции. Алгоритм Диффи – Хеллмана.
12. Кодирование с целью уменьшения объема данных. Сжатие без потерь и с потерями.

Профильный уровень

1. Понятие о линейных кодах. Код Хемминга как линейный код.
2. Задача факторизации числа. Криптографический алгоритм RSA.
3. Цифровая (электронная) подпись.
4. Алгоритм LZW (Лемпеля – Зива – Велча) сжатия данных без потерь.
5. Приемы сжатия информации, используемые в формате JPEG.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Требуется закодировать двоичным кодом роман Л. Н. Толстого «Война и мир». Найти длину кодовых слов при равномерном кодировании.

2. Описать метод Хаффмена применительно к троичному кодированию.
3. Функция f задана формулой $f(x) = x^2$. Является ли она односторонней, если x – натуральное число порядка 10^7, а все вычисления требуется производить в уме или «столбиком»? Ответ обосновать.
4. Файл BMP с первоначальным качеством графической информации TrueColor (16777216 цветов) сохраняют с пониженным качеством (256 цветов). Во сколько раз должен уменьшиться объем файла?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Для кодирования сообщения, записанного кириллицей, применяют 16-ричную систему счисления. Пробел заменяется последовательностью 00, буквы – последовательностями от 01 до 21, в соответствии с их номером в алфавите (так, буква Э кодируется как 1F). Капитализация букв игнорируется, знаки препинания перед кодированием обозначаются так, как принято в телеграммах: «ТЧК», «ЗПТ» и т.д. Требуется:

а) закодировать сообщение A (оно приведено в кавычках);

б) раскодировать сообщение W.

1. A = «Грузите апельсины бочками!»;
 W = 10000312060E060F010009111400100F1201031D0014190C.
2. A = «Пришел, увидел, победил.»;
 W = 021D141E000A1D0A000F0600021D141E000310111200090F.
3. A = «Костя, как слышно? Прием.»;
 W = 0F060015190A1406000E060F2100080A141E0014190C.
4. A = «Сундук украли со сказками!»;
 W = 0F010014120103060005121003010014190C.
5. A = «Одевайся, царем будешь!»;
 W = 11100605060E00030014010C13100014190C.
6. A = «Заграница нам поможет!»;
 W = 150003011300031321001311 0A0F010002060D012114190C.
7. A = «Пилите, Шура, пилите!»;
 W = 1A070D0013011A01001110001A101313060014190C.
8. A = «Ушел Черный Абдулла...»;
 W = 14010E10080F21000501071400051002121000 14190C.
9. A = «– А где бабуля? – Я за нее.»;
 W = 21000F060015090F0120000301130003000 4120A0E060014190C.
10. A = «Дважды два – четыре.»;
 W = 030612140A14132100021D131412060B0009060E0D210014190C.

№ 2. Сообщения A_1 и A_2 зашифрованы одним и тем же кодом; в результате получены кодовые слова W_1 и W_2. Известно, что при шифровании применен равномерный алфавитный код, причем капитализация и знаки препинания игнорируются, а пробелы кодируются. Требуется по известным A_1, W_1, W_2 восстановить сообщение A_2.

1. A_1 = «Аделина Сотникова выиграла Олимпийские игры в одиночном фигурном катании.»;

   W_1 = abafagbdbabfabaabjbgcabfbabcbgadabaaadcjbaaebiabbdabaabgbdba
   bebhbabbbjbcbaagaabaaebicjaaadaabgafbabfbgcfbfbgbeaaccbaaecb-
   bibfbgbeaabcabcaabbfbaba;

   W_2 = abaaadabbjaacgcababibdbaceaaddaabhbgbhbibgcgcbaabgbjcaabcada
   bjdd.
2. A_1 = «Но что страннее, что непонятнее всего, это то, как авторы могут брать подобные сюжеты.»;

   W_1 = тсаинсаонп1ттыыаинсатырстбнтыыаюоыэсагнсансах1ха1юнспе
   аусэмнаяп1ндарсьсятеыаовщыне;

   W_2 = тсагнсамщыаосюоыуаьпмэ1бачонспчб.
3. A_1 = «Никакой он был не принц и не герцог, а был он полковником медицинской службы.»;

   W_1 = y4z0y1z1y1y5y0w3y5y4w3z2x1y2w3y4z6w3y6y7z0y4x6w3z0w3y
   4z6w3z4z6y7x6y5z4w3z1w3z2x1y2w3y5y4w3y6y5y2y1y5z3y4z0y1y
   5y3w3y3z6z5z0x6z0y4y8y1y5y0w3y8y2x9z8z2x1;

   W_2 = z3z1y9y8y5y4w3z3x1w3x5z1y8y9y5w3z3z0z5z6y2z0w3y8y9x9y6
   z6y4x0y1z0w3z3z6z5x9x3z0z6w3z0z9w3y6y7z0x7y5z8z6y0.
4. A_1 = «Хунта был великолепным таксидермистом. Штандартенфюрер тоже. Но Хунта успел раньше.»;

   W_1 = ъштче90ар9жйрнпурйфтас9чепцнийхснцчус9эчетиехчйтщгхйх9
   чулй9ту9ъштче9шцфйр9хетбэй;

   W_2 = ишсео90еэпе9эефпш9пшфрг.
5. A_1 = «Позавчера птеродактиль Кузьма летал над клубом и скусывал электрические лампочки.»;

   W_1 = pqub8lxobcp3xoqyb537tgc52ugsbctx3btcrbyc5t29qsc7c4524h8btcft
   x53o7lx457xctbspql57;

   W_2 = 4lb43gxcytdc84xncyboqsc7cp243gcr753qcrxc26yx3cq97vxrrh6.
6. A_1 = «Оттуда мы поедем в Тифлис на автомобиле по Военногрузинской дороге.»;

   W_1 = 262424110301002715000926310331270002002429230729100008
   10001022426272633290731000926000226310808263225110529081
   0282606000326252632 31;

   W_2 = 32252610102731061024312500092621310700310003020100310 01
   33124152531.

7. A_1 = «В бричке сидел господин, не красавец, но и не дурной наружности.»;

   W_1 = 231033715201329210615203922210139161819103520210029210327100610023921110029110521002921003417102914210020071417202916151 52;

   W_2 = 03919203925110405191103291229261911003911032006200 0252.

8. A_1 = «Комнаты были полны предметов, связанных с химией или какой-нибудь уголовщиной.»;

   W_1 = нропгфэвдэ76вср7пэвстизоифревуеб5гппэчвувч6о6имв676внгнрмп6дхзювхжр7реы6прм;

   W_2 = яфрфвзрнхоипфвс6уг76взегвщи7реингвсрврщитиз6.

9. A_1 = «Эх, тройка! Птица тройка, кто тебя выдумал? Знать, у бойкого народа ты могла только родиться.»;

   W_1 = 7не4с3ц2яет4ч5яе4с3ц2яе243е4ыюже1йьпфяхешуя4иепею3ц23э3еуяс3ьяе4йеф3эхяе43хи23ес3ьч4ирж;

   W_2 = че2я23цещыеспрр2чцеуыехзюч4еюйр4с3цеышьй.

10. A_1 = «Из аппарата вышли зеленые человечки о трех ногах. Пресса поспешила объявить их пришельцами.»;

    W_1 = hgzammana5azcvtjhzgejelvezsej4ces3hz4z5nerzl41arzmneooazm4omethjaz4b7ych5wzhrzmnhtejw6akh;

    W_2 = o54yjhzgcenhz434j4zdcenh.

№ 3. С помощью алгоритма Маркова проверить, разделим ли код, заданный множеством кодовых слов S.

1. S = {aab, ca, ab, aa, cbc, bc}.
2. S = {bb, ab, cab, aaab, bcc, aa}.
3. S = {a, ab, ccb, aac, bba, cab}.
4. S = {bbc, ab, cc, aa, bb, cb}.
5. S = {ccba, abab, cc, bcc, aab, cbb}.
6. S = {accb, c, bba, ab, cca, abc}.
7. S = {aabc, bca, ca, bb, ab, cc}.
8. S = {cb, abc, aac, bba, cab, ac}.
9. S = {abbcc, cbb, bca, cc, a, b}.
10. S = {ccab, abc, aa, b, bc, aba}.

№ 4. Проверить, что существует разделимый код с заданным множеством длин кодовых слов. Построить этот код.

1. {2, 3, 3, 3, 6, 6, 7, 9}.
2. {1, 3, 3, 3, 5, 7, 8, 8}.
3. {2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 8}.
4. {1, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 8}.
5. {1, 2, 4, 5, 6, 6, 8, 9}.
6. {2, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 8}.
7. {1, 2, 3, 4, 6, 6, 8, 9}.
8. {2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 8}.
9. {2, 2, 2, 5, 7, 7, 8, 9}.
10. {2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 7}.

№ 5. Построить для указанного сообщения:

а) код Шеннона – Фано;

б) код Хаффмена.

В качестве вероятностей использовать относительную частоту символов в сообщении. Пробелы и знаки препинания также кодируются. Найти стоимость кодирования обоими методами.

1. Карл у Клары украл кораллы, а Клара у Карла украла кларнет.
2. Скажи-ка, дядя, ведь недаром Москва, спаленная пожаром, французу отдана?
3. Уж небо осенью дышало, уж реже солнышко блистало, короче становился день.
4. У входа валялась папка со смазанным грифом: «Совершенно секретно. Перед прочтением сжечь.»
5. Мы мирные люди, но наш бронепоезд стоит на запасном пути.
6. Сэм, за десять минут мы успеем добежать до канадской границы.
7. – Что теперь скажет мама? – Пустяки, дело житейское. Так и передай своей маме.
8. Вся королевская конница, вся королевская рать не могут Шалтая-Болтая собрать.
9. Аннушка уже купила подсолнечное масло, и не только купила, но даже и разлила.
10. Лет через восемь в Васюках состоится междупланетный шахматный конгресс!

№ 6. Дано слово, закодированное методом Хемминга. Проверить, была ли допущена при его передаче ошибка замещения одного символа (и если была, то в каком символе она допущена).

1. $W = 01111100101100$.
2. $W = 001110001101010$.
3. $W = 110111001111001$.
4. $W = 00011010110011$.
5. $W = 011101111100000$.
6. $W = 11110101101110$.
7. $W = 10111011100011$.
8. $W = 101111100110001$.
9. $W = 000111001011111$.
10. $W = 01000101100110$.

№ 7. Матроскин и Шарик генерируют общий секретный ключ K, используя алгоритм Диффи – Хеллмана. Для этого Матроскин задумывает простое число p, число g, свой секретный ключ a и передает по открытому каналу g, p и $A = g^a \bmod p$. Шарик задумывает свой секретный ключ b и пересылает Матроскину число $B = g^b \bmod p$.

а) Какой ключ K будет сгенерирован при данных g, p, a, b?

б) Почтальон Печкин перехватывает всю информацию, передаваемую по открытому каналу: g, p, A, B. Он знает, что ключи a и b не превышают 20. Пользуясь этой информацией, найти ключ K.

1. а) $g = 6, p = 13, a = 5, b = 7$;
   б) $g = 11, p = 17, A = 4, B = 10$.
2. а) $g = 7, p = 11, a = 8, b = 5$;
   б) $g = 14, p = 17, A = 12, B = 7$.

3. а) $g = 5, p = 17, a = 8, b = 7$;
   б) $g = 13, p = 19, A = 14, B = 11$.
4. а) $g = 6, p = 11, a = 7, b = 4$;
   б) $g = 10, p = 19, A = 12, B = 11$.
5. а) $g = 10, p = 17, a = 9, b = 11$;
   б) $g = 7, p = 17, A = 9, B = 11$.
6. а) $g = 8, p = 11, a = 8, b = 6$;
   б) $g = 14, p = 19, A = 7, B = 8$.
7. а) $g = 6, p = 17, a = 5, b = 7$;
   б) $g = 12, p = 17, A = 3, B = 8$.
8. а) $g = 7, p = 13, a = 4, b = 5$;
   б) $g = 5, p = 17, A = 16, B = 14$.
9. а) $g = 7, p = 17, a = 6, b = 3$;
   б) $g = 3, p = 19, A = 18, B = 2$.
10. а) $g = 11, p = 13, a = 5, b = 4$;
    б) $g = 3, p = 17, A = 8, B = 15$.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

№ 1. Префиксная (или равномерная – на выбор) схема алфавитного кодирования задана кодовой таблицей. Запрограммировать:
   а) кодирование текста с помощью этой схемы;
   б) декодирование закодированного сообщения.

№ 2. Задан некоторый алфавит $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; вероятность появления символа a_k в сообщении равна p_k, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Написать программу, которая по известным вероятностям p_k строит:
   а) код Шеннона – Фано;
   б) код Хаффмена.

№ 3. Запрограммировать построение двоичного кода Хемминга, каждое слово которого содержит заданное пользователем количество k информационных символов.

8. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Чтобы вывести из ничтожества все, достаточно единицы.

Г. В. Лейбниц

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Базовый уровень

1. Суждения (высказывания) и их истинностные значения. Логические связки. Пропозициональные переменные и формулы.
2. Элементарные булевы функции, их свойства.
3. Булевы функции n переменных, их представление формулами, таблицами истинности, семантическими деревьями (деревьями

решений) и векторами значений. Количество функций n переменных.
4. Двойственные функции. Принцип двойственности.
5. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ, КНФ).
6. Представление булевых функций совершенными нормальными формами (СДНФ, СКНФ).
7. Представление булевой функции полиномом Жегалкина. Способы построения полинома.
8. Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Метод Квайна.
9. Замкнутые и полные системы булевых функций. Примеры.
10. Основные замкнутые классы. Критерий Поста.
11. Представление булевых функций с помощью схем из функциональных элементов.
12. Контактные схемы и их упрощение. Функции проводимости.

Профильный уровень

1. Понятие о решетках. Булева алгебра как структура. Примеры: алгебра Кантора, алгебра ($\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg$).
2. Разложение булевой функции по одной и нескольким переменным (разложение Шеннона). СДНФ как частный случай разложения.
3. Метод карт Карно минимизации булевых функций.
4. Понятие о k-значной логике ($k > 2$) и ее элементарных функциях.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Какими свойствами обладает СДНФ булевой функции, если эта функция: а) тавтология? б) сохраняет 0? в) сохраняет 1?
2. Функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется *симметричной*, если ее значение при любой перестановке переменных не меняется: $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = f(x_i, x_j,\ldots, x_k)$, где $(i, j,\ldots, k)$ – произвольная перестановка $(1, 2,\ldots, n)$. Сколько существует симметричных булевых функций двух; трех; n переменных?
3. Во сколько раз число линейных функций n переменных меньше общего числа функций n переменных?
4. Функция называется *функцией голосования*, если принимает значение 1 в тех и только тех случаях, когда больше половины ее аргументов равны 1. Постройте функции голосования трех и четырех аргументов.
5. Назовем *квадратичной* булеву функцию, у которой каждое слагаемое полинома Жегалкина содержит конъюнкцию не более чем двух переменных, например, $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Является ли множество квадратичных булевых функций замкнутым?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Даны высказывания A и B. Выяснить, являются истинными или ложными высказывания а) $A \vee \overline{B}$; б) $\overline{A \wedge B}$; в) $A \rightarrow B$.

1. A = «Волга впадает в Каспийское море», B = «Все граждане США – индейцы племени чероки».
2. A = «БелАЗ-540 – легковая машина», B = «Солнце вращается вокруг Земли».
3. A = «Реактивный самолет движется быстрее, чем воздушный шар», B = «Камчатка расположена восточнее Таймыра».
4. A = «Дважды два – пять», B = «Столица России – Москва».
5. A = «Пушкин учился в Лицее», B = «У Тараса Бульбы было двое сыновей».
6. A = «Джон фон Нейман придумал архитектуру ЭВМ», B = «Первые компьютеры были переносными».
7. A = «Наполеон Бонапарт был королем Англии», B = «Солнце восходит на востоке, а заходит на севере».
8. A = «Вода кипит при атмосферном давлении и нулевой температуре», B = «22 сентября – день осеннего равноденствия».
9. A = «Монета не всегда падает орлом вверх», B = «Скрипка – самый большой струнный музыкальный инструмент».
10. A = «Свинец плавится при нагревании», B = «Наташа Ростова – не персонаж М. Ю. Лермонтова».

Исходные данные к заданиям №№ 2–6 (формулы, представляющие исходные булевы функции) одинаковы.

№ 2. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана формулой. Требуется:

а) построить ее таблицу истинности и представить f с помощью вектора значений;

б) представить f в виде семантического дерева;

в) проверить, является каждая из переменных x_1, x_2, x_3 существенной или фиктивной.

1. $f = \big((x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_1 \leftrightarrow x_3)\big) \leftrightarrow \overline{x}_1$.
2. $f = (x_1\overline{x}_2)\vee(x_3|\overline{x}_1)$.
3. $f = (x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3) \rightarrow x_1\overline{x}_2x_3$.
4. $f = \overline{x}_2x_3\vee(\overline{x_1 \leftrightarrow x_2})\vee x_3$.
5. $f = (x_1 \leftrightarrow x_2)\vee\big((x_1x_3) \rightarrow (x_2x_3)\big)$.
6. $f = \overline{x}_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus (\overline{x_1x_2})$.
7. $f = \big((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)\big) \rightarrow x_3x_1$.
8. $f = x_2\overline{x}_3\vee\big((\overline{x_1 \leftrightarrow x_2})x_1\big)$.
9. $f = (\overline{x_1 \leftrightarrow x_3})\vee(\overline{x_3 \rightarrow x_1})\vee x_1$.
10. $f = \overline{x}_1x_2(\overline{x}_2 \downarrow x_3)$.

№ 3. Привести заданную функцию f к ДНФ и КНФ. Представить ее в виде схемы из функциональных элементов в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$.

№ 4. Привести функцию f к СДНФ и СКНФ:

а) преобразуя найденные ранее ДНФ и КНФ;

б) используя таблицу истинности, раскладывая f по всем переменным.

№ 5. Найти полином Жегалкина, выражающий функцию f:

а) с помощью преобразований одной из формул, представляющей f (например, найденной ранее ДНФ);

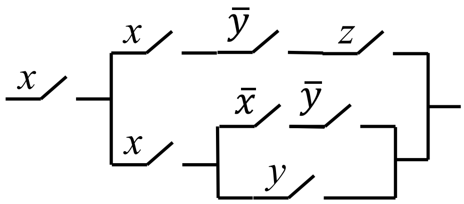
б) методом неопределенных коэффициентов.

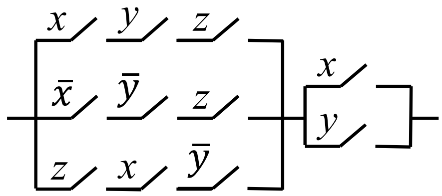
№ 6. Минимизировать заданную булеву функцию f в классе ДНФ методом Квайна.

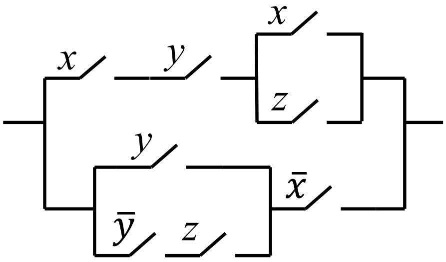
№ 7. Доказать, что система функций $\{f_1, f_2\}$, заданных векторами своих значений $(\alpha)_1$ и $(\alpha)_2$, полна. Выразить функцию g, также заданную вектором значений, через f_1 и f_2.

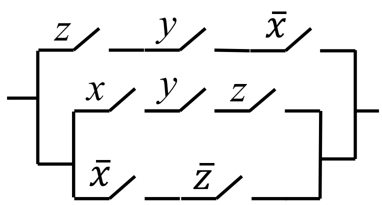
1. $(\alpha)_1 = (00000110)$, $(\alpha)_2 = (10100011)$, $(\alpha)_g = (11010110)$.
2. $(\alpha)_1 = (11001101)$, $(\alpha)_2 = (00011110)$, $(\alpha)_g = (00101101)$.
3. $(\alpha)_1 = (00000010)$, $(\alpha)_2 = (11011100)$, $(\alpha)_g = (10100011)$.
4. $(\alpha)_1 = (10001100)$, $(\alpha)_2 = (10101001)$, $(\alpha)_g = (11011101)$.
5. $(\alpha)_1 = (00110010)$, $(\alpha)_2 = (11010110)$, $(\alpha)_g = (01010111)$.
6. $(\alpha)_1 = (10101000)$, $(\alpha)_2 = (11110001)$, $(\alpha)_g = (11011101)$.
7. $(\alpha)_1 = (01011001)$, $(\alpha)_2 = (11001110)$, $(\alpha)_g = (00110010)$.
8. $(\alpha)_1 = (01001110)$, $(\alpha)_2 = (11101101)$, $(\alpha)_g = (11100010)$.
9. $(\alpha)_1 = (01010100)$, $(\alpha)_2 = (11001100)$, $(\alpha)_g = (01010110)$.
10. $(\alpha)_1 = (01010110)$, $(\alpha)_2 = (11101111)$, $(\alpha)_g = (11010100)$.

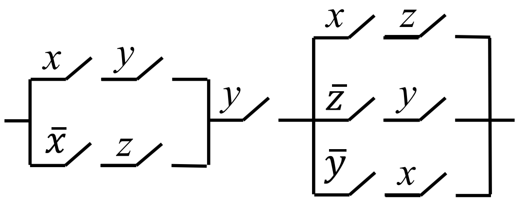
№ 8. Упростить контактную схему.

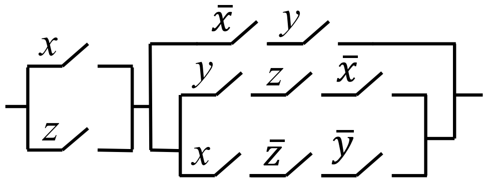
1. 

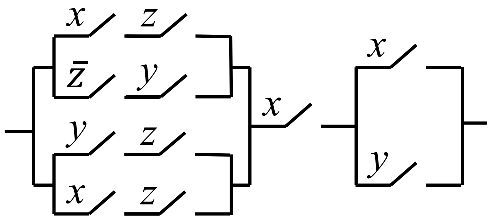
2. 

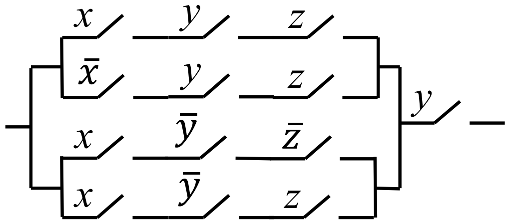
3. 

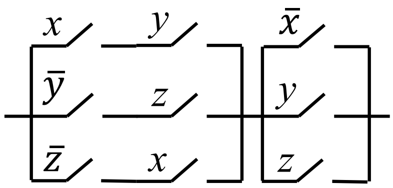
4. 

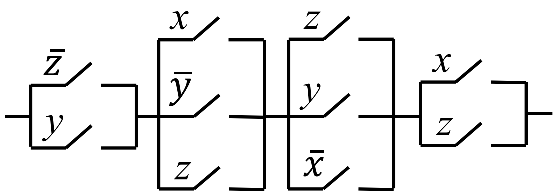
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В приведенных ниже заданиях форма представления булевой функции $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ в программе (вектор значений, дерево и т.д.) определяется программистом исходя из соображений удобства ввода информации и дальнейшего решения задачи.

№ 1. Определить, является переменная x_k существенной или фиктивной. Номер k вводится пользователем.

№ 2. Представить функцию в виде полинома Жегалкина: $f = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2x_2 \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}x_1x_2 \oplus a_{n+2}x_1x_3 \oplus \ldots$ Выходными данными служат коэффициенты полинома. Нумерация коэффициентов может отличаться от указанной. Она должна упрощать программное составление системы уравнений на коэффициенты и ее решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Бугров Я. Ф. Высшая математика. В 3 т. Т. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. Ф. Бугров, С. М. Никольский. – 9-е изд. – М. : Дрофа, 2008. – 288 с.
2. Ильин В. А. Аналитическая геометрия : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
3. Ильин В. А. Линейная алгебра : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 4-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 296 с.
4. Каган М. Л. Математика в инженерном вузе. Алгебра и геометрия / М. Л. Каган, М. В. Самохин. – М. : Стройиздат, 2003. – 208 с.
5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник. – 17-е изд., стереотип. – М. : Профессия, 2003. – 200 с.
6. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л. А. Кузнецов. – 11-е изд. – СПб. : Лань, 2008. – 240 с.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2005. – 608 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1993. – 480 с.
9. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец [и др.]; под ред. А. П. Рябушко. – 7-е изд. – Минск : Вышейш. шк., 2013. – 304 с.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Верещагин Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 1. Начала теории множеств / Н. К. Верещагин, А. Шень. – М. : МЦНМО, 1999. – 128 с.
2. Верещагин Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления / Н. К. Верещагин, А. Шень. – М. : МЦНМО, 2000. – 291 с.
3. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 416 с.
4. Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В. А. Горбатов. – М. : ФИЗМАТЛИТ,

2000. – 544 с.
5. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.
6. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры : учеб. для вузов / А. И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, , 2000. – 272 с.
7. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 395 с.
8. Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – 5-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.
9. Новиков Ф. А. Дискретная математика : учеб. для вузов / Ф. А. Новиков. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2014. – 432 с.
10. Сборник задач по алгебре : учеб. для вузов / под ред. А. И. Кострикина . – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 464 с.
11. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – 3-е изд., стер. – М. : URSS, 2006. – 296 с.
12. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2003. – 384 с.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. Википедия [Электронный ресурс] : [свобод. Интернет-энцикл.] – Электрон. дан. и прогр. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org, свободный. – Русскояз. часть междунар. проекта «Википедия». – Загл. с экрана. – Дата обращения: 15.02.2014.
2. Международный научно-образовательный сайт EqWorld [Электронный ресурс] : Электрон. дан. и прогр. – Режим доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm, свободный. – Загл. с экрана. – Дата обращения: 15.02.2014.
3. DMVN [Электронный ресурс] : [портал учебных материалов для студентов мехмата МГУ им. М.В. Ломоносова]. – Режим доступа: http://dmvn.mexmat.net, свободный. – Загл. с экрана. – Дата обращения: 15.02.2014.

СОДЕРЖАНИЕ